МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

В СХЕМАХ І ТАБЛИЦЯХ

ЧАСТИНА 1

Навчальний довідник
для самостійного вивчення курсу вищої математики
(для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання
за напрямами підготовки 6.060101 «Будівництво»,
6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка
та електротехнології»)

Харків – 2015

Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях. Частина 1 : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології») / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 106 с.

Автори : Г. А. Кузнецова,
С. М. Ламтюгова,
Ю. В. Ситникова

Рекомендовано для студентів будівельних, електромеханічних та електротехнічних спеціальностей як додатковий допоміжний матеріал, а також для самостійного вивчення теми «Основи математичного аналізу» в процесі вивчення курсу вищої математики.

Рецензент: к. ф.-м. н., доц. Л. Б. Коваленко

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 4 від 26.11.2014 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

У довіднику викладено теоретичний матеріал щодо основ математичного аналізу за такими темами: «Основні формули шкільного курсу», «Властивості та графіки основних елементарних функцій», «Диференційне числення функції однієї змінної», які входять до курсу вищої математики для студентів 1, 2 курсів будівельних, електромеханічних та електротехнічних спеціальностей денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології».

Довідник «Основи математичного аналізу (частина 1)» складається з 5 розділів: «Основні формули шкільного курсу»; «Властивості та графіки основних елементарних функцій»; «Вступ до математичного аналізу»; «Диференційне числення функції однієї змінної»; «Застосування диференційного числення функції однієї змінної» та додатків.

Теоретичний матеріал представлено у вигляді опорних таблиць, які містять: визначення основних понять та формули, коментарі, зауваження, рисунки, приклади розв’язання типових задач з застосуванням зазначеного теоретичного матеріалу.

У додатках подано окремі визначення, теореми та задачі, розв’язання яких викликає труднощі, або є допоміжним матеріалом під час розв’язання більш складних задач.

РОЛЬ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В НАУКОВОМУ ВСЕСВІТІ

Математичний аналіз як самостійна система є алгеброю у широкому розумінні цього слова, яка розглядає всі величини як невідомі числа, використовуючи при цьому букви замість арифметичних знаків – цифр. Аналіз, як такий, поєднує в собі вчення про рівність із шкільної алгебри, яка утворює першу його частину, а друга його частина займається дослідженням кінцевих та нескінчених величин. Аналіз кінцевих величин, називають «Теорією функцій», є вчення про форми величин яке поєднане у теорії рядів, сполучень, логарифмів. Аналіз нескінчених величин зазвичай називають математичним аналізом складається з трьох розділів диференційного, інтегрального та варіаційного числень.

Математичний аналіз має широке наукове поле, застосовується в фізиці, інформатиці, статистиці, техніці, економіці, бізнесі, фінансах, медицині, демографії та інших областях, в яких для рішення проблем мають бути побудовані математичні моделі та необхідно відшукати оптимальне рішення. Зокрема, майже всі поняття в класичній механіці та електромагнетизмі знаходяться у непорушному зв’язку між собою саме засобами класичного математичного аналізу. Наприклад, якщо відомий розподіл щільності об’єкта, то його маса, момент інерції, а також повна енергія в потенційному полу можна обчислити за допомогою диференційного числення. Інший, не менш яскравий приклад застосування математичного аналізу в механіці – другий закон Ньютона: історично склалося так, що в цьому законі термін швидкість ототожнюється зі зміною. Так, згідно самого формулювання закону: «Сила дорівнює масі помноженій на прискорення», оскільки прискорення – це є похідна за часом від швидкості або друга похідна за часом від траєкторії або просторового положення матеріальної точки.

Теорія електромагнетизму Максвела та загальна теорія відносності Ейнштейна також зазначається мовою диференційного числення. У хімії диференційне числення застосовується під час визначення швидкості реакції та швидкості радіоактивного розпаду. У біології за допомогою диференційного числення виконуються розрахунки динаміки популяції, з урахування даних щодо відновлення та смертності окремих видів.

Математичний аналіз застосовується поряд з іншими математичними дисциплінами. Наприклад, його застосовують разом з лінійною алгеброю, щоб відшукати лінійну апроксимацію для множини точок в області їх визначення. У теорії ймовірностей його елементи застосовують для визначення ймовірності неперервної величини в залежності від щільності її розподілу. В аналітичні геометрії під час вивчення графіків функції диференційне числення допомагає пошуку точок мінімуму та максимуму, кутів нахилу, кривизни та точок перегину кривої.

Теорема Гріна, яка встановлює співвідношення між криволінійним інтегралом за простою замкненою кривою C і подвійним інтегралом за плоскою областю D, обмеженої цією кривою C, використовується у такому відомому інструменті, як планіметр. Цей інструмент застосовують для розрахунку площі плоскої поверхні на кресленні. Його застосовують для розрахунку площі фігури неправильної форми: квітника або басейну під час проектування будівництва будь-якої його ділянки. Дискретна теорема Гріна, яка встановлює співвідношення між подвійним інтегралом функції за периметром прямокутника та лінійною комбінацією значення первісної за кутовими точками прямокутника, дозволяє швидко обчислити суму площин прямокутних областей, може бути використана для ефективного розрахунку суми прямокутних областей на зображенні, для того щоб швидко описати властивості та ідентифікувати об’єкти.

Математичний аналіз застосовується також для знаходження наближених розв’язків рівнянь. На практиці це стандартний засіб рішення диференційних рівнянь та знаходження коренів у більшості прикладів застосування. Таким прикладом є метод Ньютона, метод простої ітерації та метод лінійної апроксимації. Наприклад, під час розрахунку траєкторії космічних апаратів застосовується варіант методу Ейлера для апроксимації криволінійних курсів руху у випадках відсутності сили тяжіння.

В області медицини математичний аналіз застосовується для знаходження оптимального кута розгалуження кровоносних сосудів, які максимізують потік крові. Завдяки закону згасання, який інтерпретується у контексті виводу певних препаратів з тіла людини, числення застосовується для оцінки рівня дозування цих медичних препаратів. В ядерній медицині математичний аналіз допомагає розробляти моделі переносу випромінювання в цільовій терапії пухлин.

В економіці поняття математичний аналізу такі, як: границя, граничні витрати і граничний дохід, дозволяють визначати, аналізувати та прогнозувати максимальні прибутки та витрати.

1. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ

1.1 АЛГЕБРАЇЧНІ ФУНКЦІЇ

1.1.1 Властивості степенів

Для будь-яких x, y та додатних a, b мають місце такі рівності:

$a^0 = 1$; $\quad (ab)^x = a^x b^x$;

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

$a^x : a^y = a^{x-y}$; $\quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

$$(a^x)^y = a^{xy};$$

1.1.2 Многочлени

Для будь-яких a, b, c мають місце такі рівності:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Для $n \in \mathbf{N}$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Якщо n – парне,

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Якщо n – непарне,

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

1.1.3 Властивості арифметичних коренів

Для будь-яких натуральних n, k, більших одиниці, та будь-яких невід'ємних a, b мають місце такі рівності:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \ (a \ge 0);$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (b \ne 0); \qquad \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ якщо } 0 \le a < b;$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}; \qquad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \ge 0, \\ -a \text{ при } a < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}\,; \qquad \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|\,;$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}\,;\ \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \ge 0).$$

1.2 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

(У всіх формулах, наведених у цьому пункті, слід враховувати область припустимих значень лівої та правої частини формул)

1.2.1 Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1\,; \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1\,;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\,; \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\,;$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\,; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

1.2.2 Формули додавання

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\,;$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y\,;$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,;$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y\,;$$

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\ \operatorname{tg}y};$$

$$\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y};$$

$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\ \operatorname{tg}y};$$

$$\operatorname{ctg}(x-y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y+1}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y}.$$

1.2.3 Формули подвійного аргументу

$$\sin 2x=2\sin x\cos x;$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x;$$

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x};\quad \operatorname{ctg}2x=\frac{\operatorname{ctg}^2 x-1}{2\operatorname{ctg}x}.$$

1.2.4 Формули половинного аргументу

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2};\qquad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2};$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x};\qquad \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x};$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x};\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x}.$$

1.2.5 Формули зниження степеня

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

1.2.6 Формули перетворення суми в добуток

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right);$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y};$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y};$$

$$\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y};$$

$$\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} y=-\frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y}.$$

1.2.7 Формули перетворення добутку в суму

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y));$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y));$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y)).$$

1.2.8 Запис тригонометричних функцій через тангенс половинного кута

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\qquad \operatorname{ctg} x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

1.2.9 Формули зведення

Назва функції не змінюється				Назва функції змінюється на подібну			
u функ-ція	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin u$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos u$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\, u$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, u$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$

1.2.10 Властивості обернених функцій

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad |a| \le 1$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \quad |a| \le 1$$

$$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a, \quad a \in \mathbf{R}$$

$$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a, \quad a \in \mathbf{R}$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \quad |a| \le 1$$

$$\mathrm{arctg}\, a + \mathrm{arcctg}\, a = \frac{\pi}{2}, \quad |a| \le 1$$

1.2.11 Розв'язки найпростіших тригонометричних рівнянь

Рівняння	Розв'язки рівняння
$\sin x = a, \quad \lvert a \rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a, \quad \lvert a \rvert \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} x = a, \quad a \in \mathbf{R}$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a, \quad a \in \mathbf{R}$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$

Окремі розв'язки тригонометричних рівнянь

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi n,\ n \in Z,$$

$$\sin x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z,$$

$$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,$$

$$\cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2\pi n,\ n \in Z,$$

$$\cos x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

1.2.12 Значення тригонометричних функцій

Значення кута α		Ф у н к ц і ї			
град	Рад	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
1	2	3	4	5	6
0°	0	0	1	0	не існує
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	не існує	0
180°	π	0	-1	0	не існує
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	не існує	0
360°	2π	0	1	0	не існує

1.3 ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ

1. Основна логарифмічна тотожність :

$$x = a^{\log_a x}, \quad x > 0, \; a > 0, \; a \neq 1.$$

2. Логарифм основи дорівнює одиниці :

$$\log_a a = 1.$$

3. Логарифм одиниці дорівнює нулю :

$$\log_a 1 = 0.$$

4. Формула для логарифма добутку :

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad x_1 > 0, \; x_2 > 0.$$

5. Формула для логарифма частки :

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, \quad x_1 > 0, \; x_2 > 0.$$

6. Формула для логарифма степеня :

$$\log_a x^p = p \log_a x, \quad x > 0, \; p \in \mathbf{R}.$$

7. Формула переходу до нової основи логарифма :

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad x > 0, \; b \in \mathbf{R}, \; b > 0, \; b \neq 1.$$

Зокрема,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \qquad \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

1.4 ПРОГРЕСІЇ

Арифметична прогресія	Геометрична прогресія
$a_n = a_{n-1} + d$, де d – різниця прогресії	$b_n = b_{n-1}\, q$, де q – знаменник прогресії
Формула n-го члена	
$a_n = a_1 + (n-1)\,d$ $n = 1, 2, \ldots$	$b_n = b_1\, q^{n-1}$ $n = 1, 2, \ldots$
Формула суми перших n членів	
$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\, n$	$S_n = b_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q}, \; q \neq 1$
Формула для різниці	Формула для знаменника
$d = a_n - a_{n-1}$	$q = \dfrac{b_n}{b_{n-1}}$
Сума натуральних чисел від 1 до n	Сума нескінченної геометричної прогресії
$S = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$	$S = \dfrac{b_1}{1-q}$

1.5 ОСНОВНІ ФОРМУЛИ КОМБІНАТОРИКИ. БІНОМ НЬЮТОНА

Число перестановок з n елементів знаходяться за формулою

$$\mathrm{P}_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)\, n = n!, \qquad 0! = 1.$$

Число розміщень з n елементів по m елементів знаходяться за формулою

$$\mathrm{A}_n^m = n(n-1)\ldots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Число комбінацій з n елементів по m елементів знаходяться за формулою

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{P}_m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}$$

або

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \qquad \mathrm{C}_n^n = \mathrm{C}_n^0 = 1.$$

Властивості комбінацій:

$$\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_n^{n-m}; \qquad \mathrm{C}_n^m + \mathrm{C}_n^{m+1} = \mathrm{C}_{n+1}^{m+1}.$$

Формула бінома Ньютона має вигляд

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{C}_n^m a^{n-m} b^m = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \ldots + \mathrm{C}_n^{n-1} a\, b^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n,$$

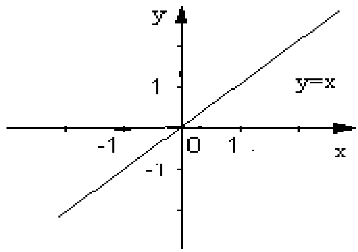
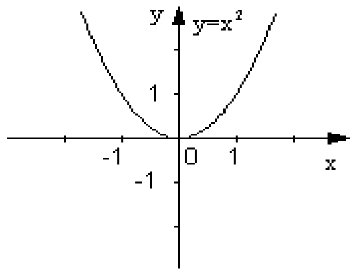
де $\mathrm{C}_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ – число комбінацій з n елементів по m елементів; $n \in \mathbf{N}$.

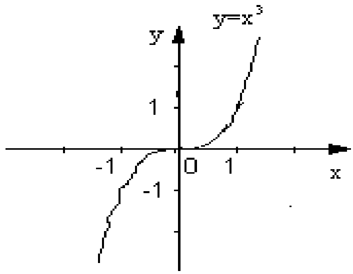
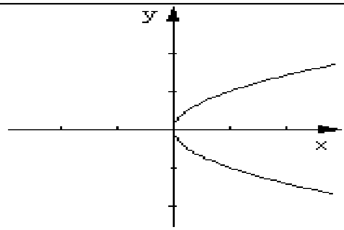
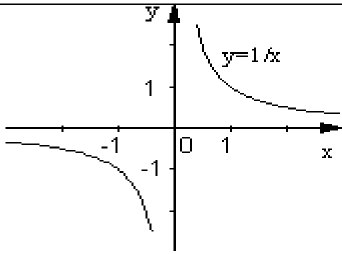
Сума біноміальних коефіцієнтів $\sum_{m=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{C}_n^m = 2^n$.

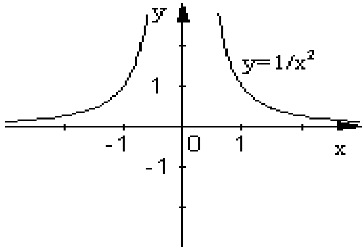
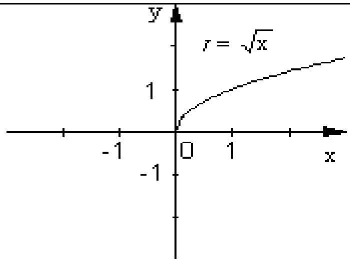
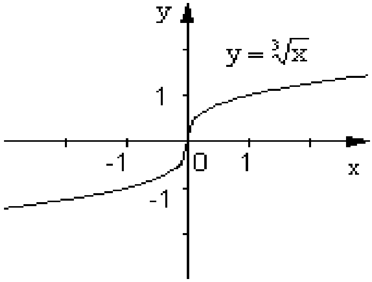
1.6 ЧИСЛОВІ ЗНАЧЕННЯ ДЕЯКИХ ВЕЛИЧИН

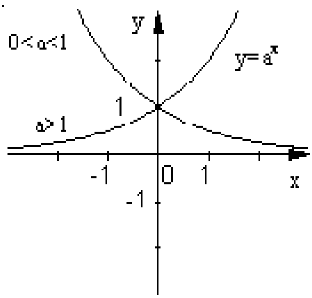
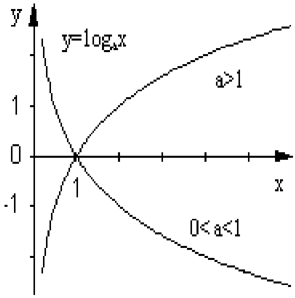
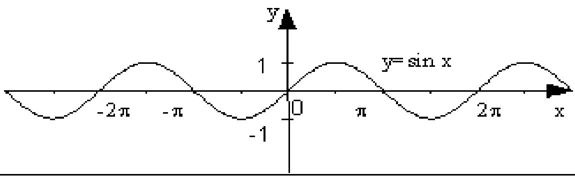
Позначення величини	Числове значення	Позначення величини	Числове значення
π	3,14159	e	2,71828
2π	6,28318	$1/e$	0,36788
$\pi/2$	1,57080	e^2	7,38906
$\pi/3$	1,04720	$\sqrt{e}$	1,64872
$\pi/4$	0,78540	$\lg e$	0,43429
$\pi/6$	0,52360	$\ln 10$	2,30258
$1/\pi$	0,31831	1 радіан	$57°17'45''$
π^2	9,86960	$1°$ (град)	0,0174 (рад)
$\sqrt{\pi}$	1,77245	$\sqrt{2}$	1,41421
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459	$\sqrt{3}$	1,73205

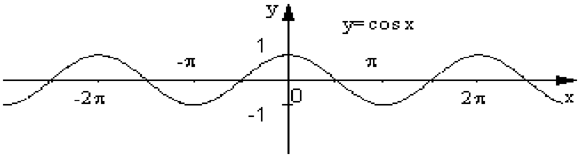
2. ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

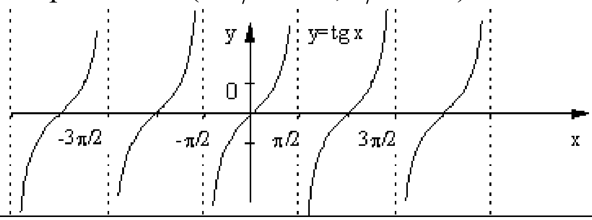
<table>
<tr><th>Аналітичний вираз функції</th><th>Графік функції</th><th>Властивості</th></tr>
<tr><td colspan="3">2.1 Степенева функція</td></tr>
<tr><td>$y=x^n$,
$n\in N$</td><td colspan="2">1. $D(x): x\in(-\infty,+\infty)$
2. $E(y): y\in(-\infty,+\infty)$ при n – непарному;
$E(y): y\in[0,+\infty)$ при n – парному
3. неперіодична
4. непарна, якщо n – непарне; парна, якщо n – парне
5. зростає на $(-\infty,+\infty)$, якщо n – непарне; спадає на $(-\infty,0)$, зростає на $(0,+\infty)$, якщо n – парне</td></tr>
<tr><td colspan="3">Частинні випадки:</td></tr>
<tr><td>$y=x$</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$y=x^2$</td><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

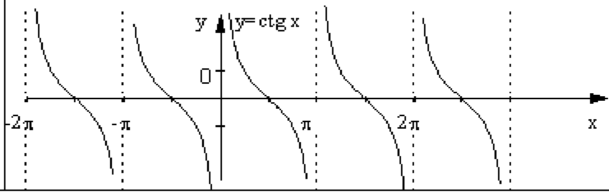
$y=x^3$	
$y^2=x$	
$y=x^{-n}$, $n\in N$	1. $D(x): x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 2. $E(y): x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ якщо n – непарне; якщо n парне $E(y): y\in[0,+\infty)$ 3. неперіодична 4. непарна, якщо n – непарне; парна, якщо n парне 5. спадає $(-\infty,0)$, та на $(0,+\infty)$, якщо n –непарне; зростає на $(-\infty,0)$ та спадає на $(0,+\infty)$, якщо n – парне
Частинні випадки:	
$y=x^{-1}$ або $y=1/x$	

$y=x^{-2}$ або $y=1/x^2$	
$y=\sqrt[n]{x}$, $n\in N$, $n>1$	1. $D(x): x\in(-\infty,+\infty)$, якщо n – непарне; $x\in[0,+\infty)$, якщо n – парне 2. $E(y): y\in(-\infty,+\infty)$ при n – непарному; $E(y): y\in[0,+\infty)$ при n – парному 3. неперіодична 4. непарна, якщо n – непарне; загального вигляду, якщо n парне 5. зростає на $(-\infty,+\infty)$, якщо n – непарне; зростає на $[0,+\infty)$, якщо n – парне
Частинні випадки:	
$y=\sqrt{x}$	
$y=\sqrt[3]{x}$	

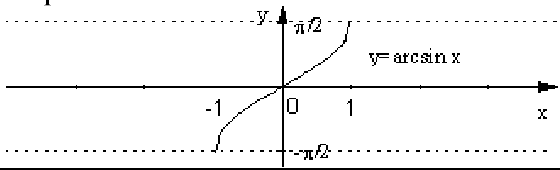
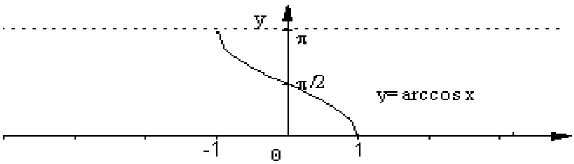
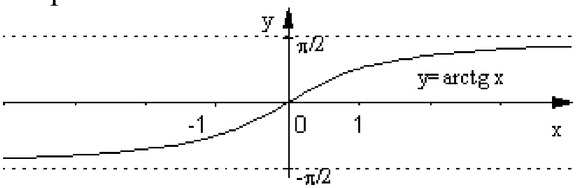
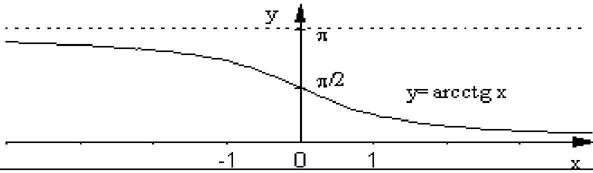
<table>
<tr><td colspan="3">2.2 Показникова функція</td></tr>
<tr><td>$y=a^x$,
$(a>0,$
$a\neq 1)$</td><td>
</td><td>1. $D(x): x\in(-\infty,+\infty)$
2. $E(y): y\in(0,+\infty)$
3. неперіодична
4.загального виду
5. зростає на $(-\infty,+\infty)$, якщо $a>1$; спадає на $(-\infty,+\infty)$, якщо $0<a<1$</td></tr>
<tr><td colspan="3">2.3 Логарифмічна функція</td></tr>
<tr><td>$y=\log_a x$
$(a>0,$
$a\neq 1)$</td><td>
</td><td>1. $D(x): x\in(0,+\infty)$
2. $E(y): y\in(-\infty,+\infty)$
3. неперіодична
4. загального виду
5. зростає на $(0,+\infty)$, якщо $a>1$; спадає на $(0,+\infty)$, якщо $0<a<1$</td></tr>
<tr><td colspan="3">2.4 Тригонометричні функції</td></tr>
<tr><td>$y=\sin x$</td><td colspan="2">1. $D(x): x\in(-\infty,+\infty)$
2. $E(y): y\in[-1,1]$
3. період $T=2\pi$
4. непарна
5. зростає на $[-\pi/2+2\pi n, \pi/2+2\pi n]$;
спадає на $[\pi/2+2\pi n, 3\pi/2+2\pi n]$, $n\in Z$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>$y = \cos x$</td>
<td>
1. $D(x): x \in (-\infty, +\infty)$
2. $E(y): y \in [-1,1]$
3. період $T = 2\pi$
4. парна
5. зростає на $[-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$; спадає на $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$


</td>
</tr>
<tr>
<td>$y = tgx$</td>
<td>
1. $D(x): x \in (-\pi/2 + \pi n,$
$\pi/2 + \pi n)$, $n \in Z$
2. $E(y): y \in (-\infty, +\infty)$
3. період $T = \pi$
4. непарна
5. зростає на $(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n)$ $n \in Z$


</td>
</tr>
<tr>
<td>$y = ctgx$</td>
<td>
1. $D(x): x \in (\pi n, \pi + n)$
$n \in Z$
2. $E(y): y \in (-\infty, +\infty)$
3. період $T = \pi$
4. непарна
5. зростає на $(\pi n, \pi + \pi n)$ $n \in Z$


</td>
</tr>
</table>

2.5 Зворотні тригонометричні функції	
$y = \arcsin x$	1. $D(x): x \in [-1,1]$ 2. $E(y): y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 3. неперіодична 4. непарна 5. зростаюча 
$y = \arccos x$	1. $D(x): x \in [-1,1]$ 2. $E(y): y \in (0, \pi)$ 3. неперіодична 4. загального вигляду 5. спадаюча 
$y = arctgx$	1. $D(x): x \in (-\infty, +\infty)$ 2. $E(y): y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 3. неперіодична 4. непарна 5. зростаюча 
$y = arcctgx$	1. $D(x): x \in (-\infty, +\infty)$ 2. $E(y): y \in (0, \pi)$ 3. неперіодична 4. загального вигляду 5. спадаюча 

2.6 Геометричні перетворення графіків функції

Якщо відомо графік функції $y=f(x)$, то за допомогою геометричних перетворень можна побудувати графік більш складної функції. Для цього слід дотримуватися таких правил, як:

1) графік функції $y=A\cdot f(x)$ отримують з графіка функції $y=f(x)$ завдяки «розтягуванню» вздовж осі $0y$ у A разів, якщо $A>1$, і «стисненню» вздовж осі $0y$ у $1/A$ разів, якщо $0<A<1$;

2) графік функції $y=f(\mu\cdot x)$ отримують завдяки «розтягуванню» графіка функції $y=f(x)$ вздовж осі $0x$ у $1/\mu$ разів, якщо $0<\mu<1$ і «стисненню» вздовж осі $0x$ у μ якщо $\mu>1$;

3) графік функції $y=f(x+b)$ отримують завдяки паралельному перенесенню графіка функції $y=f(x)$ у від'ємному напрямку осі $0x$ на $|b|$ при $b>0$, і у додатному напрямку – при $b<0$;

4) графік функції $y=f(x)+M$ отримують завдяки паралельному перенесенню графіка функції $y=f(x)$ у від'ємному напрямку осі $0y$ в додатному напрямку осі $0y$ на M, якщо $M>0$, і у від'ємному напрямку на $|M|$ при $M<0$;

5) графік функції $y=-f(x)$ отримують завдяки симетричному відображенню (дзеркальне відображення) графіка функції $y=f(x)$ відносно осі $0x$;

6) графік функції $y = f(-x)$ отримують завдяки симетричному відображенню (дзеркальне відображення) графіка функції $y = f(x)$ відносно осі $0y$;

7) графік функції $y = |f(x)|$ отримують з графіка функції $y = f(x)$ наступним чином: частина графіка функції $y = f(x)$, що розташована над віссю $0x$ (де $f(x) \geq 0$), не змінюється, а частина графіка функції $y = f(x)$, що розташована під віссю $0x$ (де $f(x) < 0$), відображається симетрично осі $0x$;

8) графік функції $y = f(|x|)$ отримують з графіка функції $y = f(x)$ наступним чином: при $x \geq 0$ графік функції $y = f(x)$ не змінюється, при $x < 0$ частина графіка відображається симетрично осі $0y$.

Зауваження. Відомими графіками функції $y = f(x)$ вважають графіки елементарних функцій.

Розглянемо практичне застосування зазначених нами правил геометричних перетворень графіків функцій на прикладах побудувати графік декількох функції.

ПРИКЛАД 1. Побудувати графік функції

$$y = -4\cos 2x + 1.$$

Розв'язання: Для побудови графіка зазначеної функції виконаємо такі геометричні перетворення графіка $y = \cos x$:

1) побудуємо графік функції $y = \cos x$ (рис.1);

2) побудуємо графік функції $y = -4\cos x$, для цьо

го розтягуванню» вздовж осі $0y$ у 4 разів графік функції $y = \cos x$, а також врахуємо той факт що коефіцієнт від'ємний, отримаємо графік на рис.1 позначений пунктирною лінією;

3) побудуємо графік функції $y = -4\cos 2x$, для цього графік функції $y = -4\cos x$ стиснемо вздовж осі $0x$ у 2 рази, оскільки $2 > 1$ (дивись п. 2), отримаємо графік на рис.1 позначений жирною пунктирною лінією;

4) побудуємо графік функції $y = -4\cos 2x + 1$, для цього виконаємо паралельний перенос графіка функції $y = -4\cos 2x$ у додатному напрямку осі $0y$ на 1, результат представлено на рис. 1.

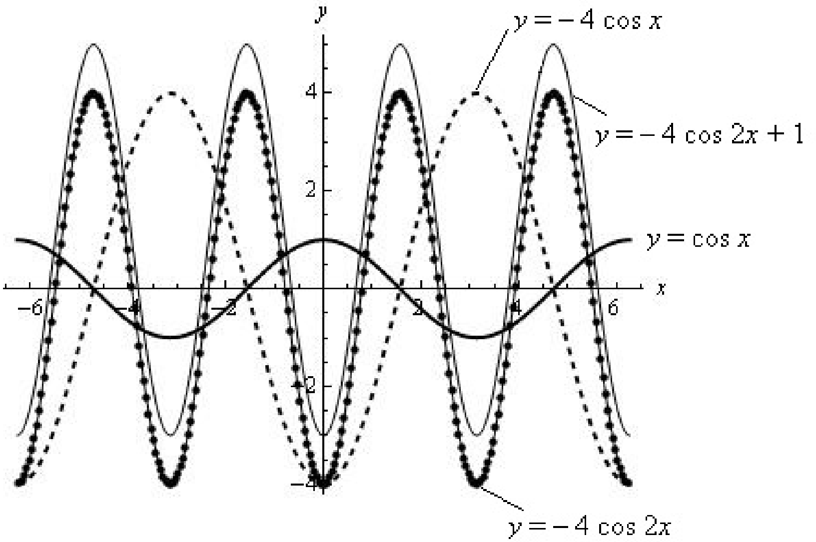


Рис. 1

ПРИКЛАД 2. Побудувати графік функції

$$y = (x+1)^2 - 3$$

<u>*Розв'язання:*</u> Для побудови графіка заданої функції виконаємо такі геометричні перетворення графіка $y = x^2$:

1) побудуємо графік функції $y = x^2$ (рис. 2);

2) побудуємо графік функції $y = (x+1)^2$, паралельним перенесенням графіка функції $y = x^2$ ліворуч по осі $0x$ на 1 одиницю (рис. 2);

3) побудуємо графік функції $y = (x+1)^2 - 3$ паралельним перенесенням графіка функції $y = (x+1)^2$ у від'ємному напряму по осі $0y$ на 3 одиниці (рис. 2).

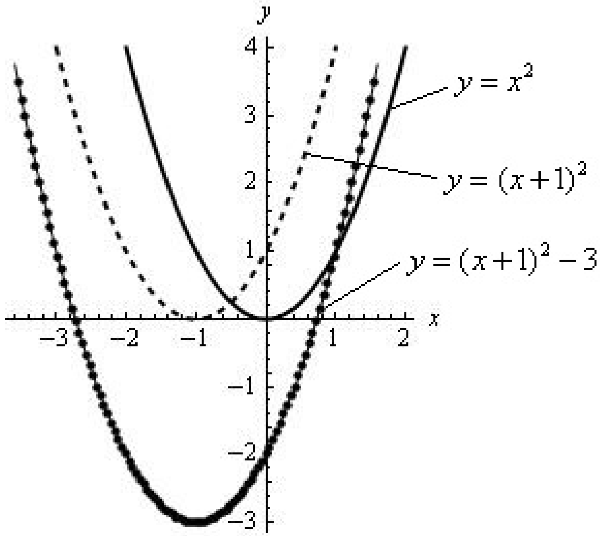


Рис. 2

3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

2.1 ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ТА НЕСКІНЧЕНО ВЕЛИКІ ВЕЛИЧИНИ

Визначення поняття Аналітичний вираз	Властивості
Число b називають ***границею функції*** $f(x)$ при $x \to x_0$ (читається: «x прямує до x_0») якщо при наближені x до x_0 - хоч праворуч хоч ліворуч, - значення $f(x)$ необмежено наближається («прямує») до b. Записуємо: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ АБО: Число b називають ***границею функції*** $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо величина $\|f(x) - b\|$ скільки завгодно мала при достатній малості величини $\|x - x_0\|$.	**Основні теореми:** 1. $\lim(u_1 + u_2) = \lim u_1 + \lim u_2$. 2. $\lim(u_1 - u_2) = \lim u_1 - \lim u_2$. 3. $\lim(u_1 \cdot u_2) = \lim u_1 \cdot \lim u_2$. 4. $\lim(\frac{u_1}{u_2}) = \frac{\lim u_1}{\lim u_2}$, $\lim u_2 \neq 0$ 5. $\lim(C \cdot u) = C \cdot \lim u$.

ПРИКЛАД. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to 2}(7x^2 - 3x + 4)$; б) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3x - 7}{2x - 21}$.

Розв'язання:

а) $\lim\limits_{x \to 2}(7x^2 - 3x + 4) = \lim\limits_{x \to 2}(7 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 4) = \lim\limits_{x \to 2} 26 = 26$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-7}{2x-21}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(3\cdot 3-7)}{\lim\limits_{x\to 3}(2\cdot 3-21)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}2}{\lim\limits_{x\to 3}(-15)}=-\dfrac{2}{15}$.

Функція $\alpha(x)$ називається ***нескінченно малою величиною*** при $x\to x_0$, або при $x\to\infty$, якщо її границя дорівнює нулю: $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.	1. Алгебраїчна сума нескінченно малих величин дорівнює нескінченно малій величині. 2. Добуток нескінченно малої величини на обмежену функцію є величина нескінченно мала. 3. Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, границя якої відрізняється від 0, є величина нескінчена мала (див. Додаток 1). 4. Нескінченно мала величини є обмеженою.

ПРИКЛАД 1. Функція $1-\cos\alpha$ є нескінченно малою величиною при $\alpha\to 0$, оскільки $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1-\cos\alpha)=0$.

Кажуть, що «величина $1-\cos\alpha$ нескінченно мала, якщо нескінченно мала α ».

ПРИКЛАД 2. Величина $\dfrac{3x-7}{2x-21}$ при $x\to 3$ не є нескінченно малою, оскільки її границя дорівнює $-2/15$.

ПРИКЛАД 3. Функція x^2-4 є нескінченно малою величиною при $x\to\pm 2$. А при $x\to 1$ не є нескінченно малою величиною.

Зауваження. З усіх сталих величин лише нуль є нескінченно малою величиною.

Функція $\alpha(x)$ називається ***нескінченно великою величиною*** при $x \to x_0$, якщо її границя дорівнює нескінченості: $$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \infty$$	1. Не існує сталої величини, яка є нескінченно великою. 2. Добуток сталої відмінної від нуля величини C на нескінченно велику є нескінченно великою величиною. 3. Добуток двох нескінченно великих величин є нескінченно великою величиною (див. Додаток 2).

ПРИКЛАД 1.Функція tgx є нескінченно великою величиною при $x \to \pi/2$.

ПРИКЛАД 2. Функція $1/x$ є нескінченно великою величиною при $x \to 0$, тобто тоді, коли величина x є нескінченно малою величиною, оскільки при наближені x до 0 , абсолютне значення $1/x$ необмежено зростає.

Зауваження. Вираз «абсолютне значення величини y необмежено зростає» має значення, що $|y|$ з деякого моменту залишається більшим за будь-яке наперед задане додатного числа. У зв’язку з цим уточнюємо *визначення нескінченно великої величини* так:
Функція $\alpha(x)$ називається ***нескінченно великою величиною*** при $x \to x_0$, якщо абсолютне значення $\alpha(x)$ залишається більшим за будь-яке наперед задане додатне число M у будь-якому випадку коли абсолютне значення $x - x_0$ менше деякого додатного числа δ (яке залежить від M)

3.2 ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЇ. РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

Назва та вигляд невизначеності	Правило розкриття
$\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$ для многочленів	Для розкриття невизначеності виду $0/0$ для многочленів $P(x)/Q(x)$ треба чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ розкласти на множники та скоротити дріб, а потім перейти до границі.

ПРИКЛАД 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^4-5x^3-5x+2}{x^2-4}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^4-5x^3-5x+2}{x^2-4}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\left|\begin{array}{l|l} -\,3x^4-5x^3-5x+2 & x-2 \\ \quad 3x^4-6x^3 & \overline{3x^3+x^2+2x-1} \\ \hline \qquad -\,x^3-5x+2 & \\ \qquad\quad x^3-2x^2 & \\ \hline \qquad\qquad -\,2x^2-5x+2 & \\ \qquad\qquad\quad 2x^2-4x & \\ \hline \qquad\qquad\qquad -\,-x+2 & \\ \qquad\qquad\qquad\quad -x+2 & \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x^3+x^2+2x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^3+x^2+2x-1}{x+2}=$$

$$=\frac{3\cdot 2^3+2^2+2\cdot 2-1}{2+2}=7\frac{3}{4}.$$

ПРИКЛАД 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1}$. *Розв'язання*: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1}=\left\|\dfrac{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2}{1^3-1}=\dfrac{0}{0}\right\|=$ $=\left\|\begin{matrix}3x^2-5x+2=0\\ x_1=1;\ x_2=2/3\end{matrix}\right\|=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x-1)(x-2/3)}{(x-1)(x^2+x+1)}=3\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2/3}{x^2+x+1}=$ $=3\cdot\dfrac{1-2/3}{1^2+1+1}=\dfrac{1}{3}$.	
$\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$ для ірраціональних виразів	Для розкриття невизначеності виду $0/0$ для ірраціональних виразів треба спочатку відповідним чином позбавитись ірраціональності, що дає нуль, потім скоротити дріб, і, нарешті, перейти до границі. *Зауваження*. Щоб позбавитися ірраціональності необхідно і чисельник і знаменник помножити на відповідно протилежне та скористатися формулами скороченого множення (див. п. 1.1.2 Многочлени).
ПРИКЛАД 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}$. *Розв'язання*: Помножимо і чисельник, і знаменник на $\sqrt{5x-1}+3$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{5x-1}-3\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}{\left(4x^2-5x-6\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}=$ $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{5x-1}+3}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x-1-9}{4x^2-5x-6}=\dfrac{1}{\sqrt{5\cdot 2-1}+3}\times$	

$$\times\lim_{x\to 2}\frac{5x-10}{4x^2-5x-6}=\left|\begin{matrix}4x^2-5x-6=0\\ x_1=2;\ x_2=-3/4\end{matrix}\right|=\frac{1}{6}\times$$

$$\times\lim_{x\to 2}\frac{5(x-2)}{4(x-2)(x+3/4)}=\frac{5}{4}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+3/4}=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{2+3/4}=\frac{5}{11}.$$

ПРИКЛАД 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x}$

<u>*Розв'язання*</u>:

Помножимо і чисельник і знаменник на $\sqrt{-3x}+x$, щоб позбавитися ірраціональності у знаменнику, а також на вираз $\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)$ щоб позбавитися ірраціональності у чисельнику

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\left(\sqrt[3]{4x+4}+2\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)}{\left(\sqrt{-3x}+x\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{-3x}-x}{\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4}\cdot\lim_{x\to -3}\frac{4x+4+8}{-3x-x^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{-3\cdot(-3)}-(-3)}{\sqrt[3]{(4\cdot(-3)+4)^2}-2\sqrt[3]{4\cdot(-3)+4}+4}\cdot\lim_{x\to -3}\frac{4(x+3)}{-x(3+x)}=$$

$$=\frac{6}{12}\cdot(-4)\lim_{x\to -3}\frac{1}{x}=-2\cdot\frac{1}{-3}=\frac{2}{3}.$$

$\left\lvert\dfrac{\infty}{\infty}\right\rvert$ для многочленів	Для розкриття невизначеності виду ∞/∞ для многочленів $P(x)/Q(x)$ треба чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ поділити на найвищий степінь x, а потім перейти до границі.

	Зауваження. Це правило справедливе для всіх випадків нескінченно великих величин ∞, $+\infty$ чи $-\infty$, тобто знак символу ∞ можна не уточнювати.

ПРИКЛАД 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}$.

Розв'язання: Поділимо і чисельник і знаменник на x^2:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to -\infty}\frac{5-4/x-7/x^2}{8-3/x+6/x^2}=\frac{5}{8},$$

оскільки $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6}{x^2}=0$.

ПРИКЛАД 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-4x-7}{8x^4-3x^2+6}$.

Розв'язання: Поділимо і чисельник і знаменник на x^3:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{5x^3-4x-7}{8x^4-3x^2+6}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to \infty}\frac{5-4/x^2-7/x^3}{8x-3/x+6/x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{8x}=\frac{5}{\infty}=0.$$

ПРИКЛАД 3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^5-5x^3-4x+6}{4x^4-3x+1}$.

Розв'язання: Поділимо і чисельник і знаменник на x^5:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{2x^5-5x^3-4x+6}{4x^4-3x+1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to \infty}\frac{2-5/x^2-4/x^4+6/x^5}{4/x-3/x^4+1/x^5}=$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{2-0-0+0}{0-0+0}=\infty$$

(Див. Додаток 3)

3.3 ЧУДОВІ (ВАЖЛИВІ) ГРАНИЦІ

Назва	Аналітичний вираз	Наслідки
Перша чудова границя	$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=1.$	$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{tg\,\alpha}{\alpha}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=1.$ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=1.$ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{arctg\,\alpha}{\alpha}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=1.$

ПРИКЛАД 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{x}$.

<u>*Розв'язання:*</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 5x\cdot\sin 5x}{5\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin 5x=1\cdot\lim_{x\to 0}\sin 5x=1\cdot\sin 0=0.$$

ПРИКЛАД 2. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}$.

<u>*Розв'язання:*</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\cos x=1\cdot 1=1.$$

Назва	Аналітичний вираз	Наслідки
Друга чудова границя	$\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=\left\|1^{\infty}\right\|=e$	$\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=\left\|1^{\infty}\right\|=e$

ПРИКЛАД 1. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x+2}\right)^{2x+1}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x+2}\right)^{2x+1}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x-5}{x+2}-1\right)\right)^{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-7}\cdot\frac{-7}{x+2}(2x+1)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7(2x+1)}{x+2}}=e^{-7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+1/x}{1+2/x}}=e^{-7\cdot\frac{2+0}{1+0}}=e^{-14}.$$

ПРИКЛАД 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{(1/\sin x)\cdot(\sin x/x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/x)}=e^{1}=e\ .$$

ПРИКЛАД 3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(3-x)[\ln(3x-4)-\ln(3x)]$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}(3-x)[\ln(3x-4)-\ln(3x)]=\left|\infty-\infty\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{3x-4}{3x}\right)^{3-x}=\ln\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x-4}{3x}\right)^{3-x}=\left|1^{\infty}\right|=$$

$$=\ln\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{3x-4}{3x}-1\right)^{3-x}=\ln\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-4}{3x}\right)^{(3-x)\cdot\left(\frac{-4}{3x}\right)\cdot\left(\frac{3x}{-4}\right)}=$$

$$=\ln\lim_{x\to 0}e^{(3-x)\cdot\left(\frac{-4}{3x}\right)}=\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x-12}{3x}}=\ln e^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}.$$

3.4 ПОРІВНЯННЯ НЕСКІНЧЕНО МАЛИХ ВЕЛИЧИН

Ознаки порівняння	Приклад
Якщо $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то α називається нескінченно малою ***вищого порядку*** малості порівняно з β і позначається $\alpha = o(\beta)$ (див. Додаток 1).	Нехай $\alpha = x^5$, $\beta = x$, $n > 1$, $x \to 0$. Тоді $\lim\limits_{x\to 0}(\alpha / \beta) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^5/x\right) = \lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0$. Отже, $\alpha = o(\beta)$.
Якщо $\lim \frac{\alpha}{\beta^k} = A \neq 0$, то α називається ***нескінченно малою*** k***-го порядку*** малості порівняно з β.	Нехай $\alpha = 4x^3$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha / \beta^3\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(4x^3/x^3\right) = 4$. Отже, величина α є нескінченно малою третього порядку малості відносно β.
Якщо $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$, то α і β називаються ***нескінченно малими одного порядку*** малості.	Нехай $\alpha = \sin 2x$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді $\lim\limits_{x\to 0}(\alpha / \beta) = \lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x / x) = 2$. Отже, нескінченно малі α і β одного порядку.
Якщо $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то α і β називаються ***еквівалентними нескінченно малими***, позначається $\alpha \sim \beta$ (див. Додаток 1).	Нехай $\alpha = (x+1)/x^2$, $\beta = 1/x$, $x \to \infty$. Тоді $\lim\limits_{x\to\infty}(\alpha / \beta) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2} : \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} =$ $= \lim\limits_{x\to\infty}(1 + 1/x) = 1$. Отже, $\alpha \sim \beta$.

Якщо відношення α/β не має ні скінченної, ні нескінченної границі, то α і β називаються ***непорівнянними нескінченно малими.***	Нехай $\alpha = x\sin(1/x)$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді $\lim\limits_{x\to 0}(\alpha/\beta) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin(1/x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ не існує. Отже, α і β – непорівнянні.

3.5 ТАБЛИЦЯ ЕКВІВАЛЕНТНИХ НЕСКІНЧЕНО МАЛИХ ВЕЛИЧИН

$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$	$arctg\, x \underset{x\to 0}{\sim} x$	$a^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln a$
$tg\, x \underset{x\to 0}{\sim} x$	$1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} x^2/2$	$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
$\arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x$	$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$

ПРИКЛАД. Обчислити границі:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-6x^2\right)}{arctg\, x}; \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x - x^2}{1-\sqrt[7]{1+x}}.$$

<u>*Розв’язання:*</u> 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-6x^2\right)}{arctg\, x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \left|\ln\left(1-6x^2\right) \sim -6x^2;\right.$

$$\left. arctg\, x \sim x \right| = \lim_{x\to 0}\frac{-6x^2}{x} = 0;$$

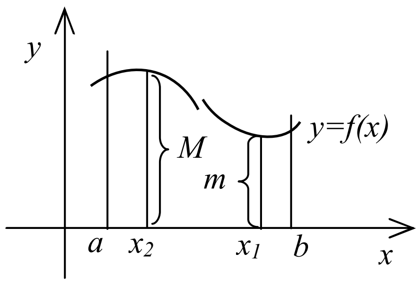
$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x - x^2}{1-\sqrt[7]{1+x}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|\arcsin 3x \sim 3x;\right.$$

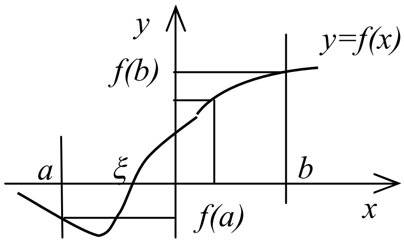
$$\left.1-\sqrt[7]{1+x} \sim -\frac{x}{7}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{3x - x^2}{-x/7} = \lim_{x\to 0}\frac{x(3-x)}{-x/7} = \lim_{x\to 0}\frac{(3-x)}{-1/7} = -21.$$

3.6 НЕПЕРЕВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Визначення	Властивості
Функція $f(x)$ називається ***неперервною у точці*** $x=a$, якщо виконуються такі умови: 1) при $x=a$ функція $f(x)$ має певне значення b; 2) при $x \to a$ функція $f(x)$ має границю, яка теж дорівнює b. Якщо порушується хоча б одна умова функція називається розривною у точці $x=a$ ю	1. Сума, різниця та добуток двох функцій неперервних у точці $x=a$ неперервна у цій точці. Частка двох функцій, неперервних у точці $x=a$, неперервна, якщо дільник не дорівнює нулю. 2. Якщо функція $x=a$ неперервна при деякому значенні x, то приріст функції нескінченно мале при нескінченно малому прирості аргументу. 3. Якщо функція $y=f(u)$ неперервна у точці u_0, а функція $u=\varphi(x)$ неперервна у точці $u_0=\varphi(x_0)$ то складна функція $y=f[\varphi(x)]$ неперервна у точці x_0.

ПРИКЛАД. Функція $f(x)=\dfrac{2}{x-4}$ неперервна у точці $x=5$, оскільки при $x=5$ вона має значення 2, при $x\to 5$ функція має границю, яка також дорівнює 2. Але у точці $x=4$ функція має розрив, тому що не виконується перша умова ($f(4)$ не має значення), а

також й друга $\lim\limits_{x \to 4} \frac{2}{x-4} = \infty$	
Функція $f(x)$ називається ***неперервною на відрізку,*** якщо вона неперервна у кожній точці цього відрізка разом з його кінцями.	1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона обмежена на цьому відрізку (див. Додаток 4). 2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ (рис. 3), то вона досягає на цьому відрізку найменшого m та найбільшого значення M (теорема Вейерштраса).  Рис. 3 . 3. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і значення її на кінцях цього відрізку $f(a)$ та $f(b)$ мають протилежні знаки (рис. 4), то всередині відрізку знайдеться точка $\xi \in [a,b]$ така, що

	$f(\xi)=0$ (теорема Больцано-Коши).  Рис. 4
ПРИКЛАД. Функція $f(x)=x^2$ неперервна на відрізку $\left[-2,3\right]$ (див. п. 2, графік функції)	

3.7 КЛАСИФІКАЦІЯ ТОЧОК РОЗРИВУ ТА ПРАВИЛО ЇХ ЗНАХОДЖЕННЯ

Назва	Визначення
Точка розриву першого роду	Точка x_0 називається т*очкою розриву першого роду,* якщо існують односторонні границі функції ліворуч та праворуч при $x \to x_0$, але не рівні одна до одної.
Точка розриву другого роду	Точка x_0 називається т*очкою розриву другого роду,* якщо хоча б одна з односторонніх границь дорівнює

	нескінченості або не існує.
Точка усувного розриву	Точка x_0 називається *точкою усувного розриву,* якщо при $x \to x_0$ існує і границя функції, але не дорівнює значенню функції у цій точці.
Точка розриву нескінченний стрибок	Якщо в точці розриву II роду x_0 існують одна нескінченна одностороння границя, а інша – скінченна чи нескінченна, то маємо ***нескінченний стрибок***.

Правило. *Для знаходження точок розриву функції* $f(x)$ *і визначення їх характеру треба:*

1) знайти можливі точки розриву (скінченні кінці інтервалів області визначення; точки, в яких змінюється характер задання функції, і т.п.);

2) у кожній «підозрілій» точці x_0 *обчислити , якщо існують, значення функції* $f(x_0)$ *та обидві односторонні границі* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ *і* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$*;*

3) з аналізу отриманих значень зробити висновок про наявність і характер розриву.

ПРИКЛАД 1. Дослідити на неперервність функцію, визначити точки розриву функції та побудувати її графік $y = 3^{-1/x^2}$

Розв'язання: Функція $y = 3^{-1/x^2}$ невизначена у точці $x = 0$. Розглянемо $\lim\limits_{x \to -0} 3^{-1/x^2} = 0$ і $\lim\limits_{x \to +0} 3^{-1/x^2} = 0$.

Якщо довизначити функцію рівністю $f(0) = 0$, то дістанемо неперервну у точці $x=0$ функцію. Отже,маємо усувний розрив (рис. 5).

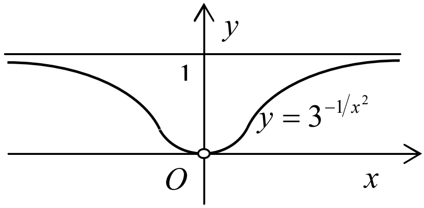


Рис. 5

ПРИКЛАД 2. Дослідити на неперервність функцію та побудувати її графік $y = f(x) = \begin{cases} 2^{2/(x+1)} - 3, & x < 1; \\ \log_2 x, & x \geq 1 \end{cases}$.

<u>*Розв'язання:*</u> Функція $y = f(x) = \begin{cases} 2^{2/(x+1)} - 3, & x < 1; \\ \log_2 x, & x \geq 1 \end{cases}$

визначена на всій числовій прямій, крім точки $x=-1$, а в точці $x=1$ змінюється її аналітичний вираз. Тому маємо дві точки, що «підозрілі» на розрив. У точці $x=-1$ (ліворуч та праворуч від неї) маємо:

$$\lim_{x\to -1-0}\left(2^{2/(x+1)}-3\right)=-3;$$

$$\lim_{x\to -1+0}\left(2^{2/(x+1)}-3\right)=+\infty.$$

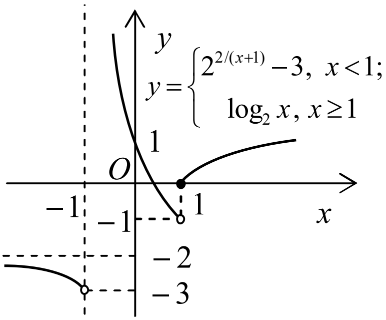


Рис. 6

Тож, у точці $x=-1$ функція має нескінченний стрибок (рис. 6). У точці $x=1$ маємо:

$$\lim_{x\to 1-0}\left(2^{2/(x+1)}-3\right)=-1;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\log_2 x=0;\ f(1)=\log_2 1=0.$$

Отже, у точці $x=1$ функція має скінченний стрибок висотою 1 (рис. 6).

4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1 ПРИРІСТ АРГУМЕНТУ ТА ФУНКЦІЇ. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

<table>
<tr><td colspan="2">Нехай x, x_0 - два значення аргументу з області визначення функції $y = f(x)$.</td></tr>
<tr><td>Приріст аргументу
$\Delta x = x - x_0$

Приріст функції
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$</td><td>Різниця $x - x_0$ називається приростом аргументу (позначається Δx, читається «дельта ікс»).

Зміна значення функції на величину $\Delta y = f(x) - f(x_0) =$ $= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ називається приростом функції $y = f(x)$ у точці x_0 (можна також позначати Δf або $\Delta f(x_0)$).</td></tr>
<tr><td>$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$</td><td>Визначення. Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції в точці x до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля (можна позначати y' або $f'(x)$).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Операція знаходження похідної називається диференціюванням.</td></tr>
</table>

4.2 ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ. ДОТИЧНА ДО ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

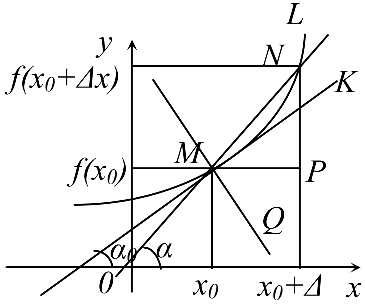


Рис. 7

$f'(x_0) = tg\alpha$

$k = tg\alpha = f'(x_0)$, *де* k *- кутовий коефіцієнт дотичної;*

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ - ***рівняння дотичної*** *до графіка функції* $y = f(x)$ *в точці з абсцисою* x_0.

Нехай дано деяку лінію L і на ній точку M (рис. 7). Візьмемо на лінії L деяку точку N, яка не збігається з точкою M. Пряма MN є січною для лінії L. Нехай тепер точка N наближається до точки M, залишаючись на лінії L. Тоді кожному положенню точки N відповідатиме своя січна і усі ці січні проходитимуть через точку M.

Дотичною до лінії L у точці M називається граничне положення MK січної MN, якщо точка N прямує до точки M. Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, графіком якої є лінія L, диференційована у точці x_0. У декартовій прямокутній системі координат точка M, яка лежить на графіку функції $y = f(x)$ має координати $(x_0; f(x_0))$.

Нехай точка N належить графіку функції (рис. 7) і має координати $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Проведемо через точку M пряму, паралельну Ox, і позначимо точку її перетину з прямою $x = x_0 + \Delta x$ через P. Розглянемо

прямокутний трикутник MNP. Відношення $(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))/\Delta x = tg\alpha$ дорівнює тангенсу кута нахилу січної MN до додатного напряму осі Ox. Якщо приріст $\Delta x \to 0$, то геометрично це означає, що точка $N(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ рухатиметься по лінії L, наближаючись до точки M, а кут α прямуватиме до кута α_0 – кута нахилу дотичної до додатного напряму осі Ox. Тоді $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))/\Delta x\right] = \lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\alpha$. Оскільки границя лівої частини рівності дорівнює $y_0' = f'(x_0)$, а границя правої частини дорівнює $tg\alpha_0$, тому $tg\alpha_0 = y_0'$. Тобто значення похідної функції $f'(x)$, у точці x_0, дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної.
Геометричний зміст похідної: значення похідної в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 і дорівнює тангенсу кута нахилу цієї дотичної до осі абсцис (кут відлічується від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки).
ПРИКЛАД 1. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=\sqrt{x-2}$, якщо дотична паралельна до прямої $y=2x+7$. *<u>Розв’язання:</u>* За умовою задачі відомо, що дотична паралельна прямій $y=2x+7$, а це означає, що кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює кутовому коефіцієнту даної прямої, тобто $k=2$. Щоб визначити координати точки дотику, знайдемо похідну від рівняння кривої $y=\sqrt{x-2}$: $y' = 1/(2\sqrt{x-2})$ і прирівняємо до коефіцієнту дотичної (використовуючи геометричний

зміст похідної функції),отримаємо: $1/(2\sqrt{x-2})=2; (1-4\sqrt{x-2})/(2\sqrt{x-2})=0; 1-4\sqrt{x-2}=0$ *і* $2\sqrt{x-2}\neq 0$; $4\sqrt{x-2}=1$ *і* $x\neq 2$; $x-2=1/16$ *і* $x\neq 2$; $x=33/16$. Отже, абсциса точки дотику дорівнює $x_0=33/16$. Знайдемо значення ординати точки дотику, підставимо $x_0=33/16$ в рівняння кривої $y=\sqrt{x-2}$. Отримаємо: $y_0=y(33/16)=\sqrt{33/16-2}=1/4$. Тепер всі знайдені величини підставимо у рівняння дотичної $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, отримаємо: $y-1/4=2(x-33/16)$. Перетворимо рівняння дотичної до загального виду: $2x-y-31/8=0$.

ПРИКЛАД 2. З'ясувати, в яких точках кривої $y=\sin 2x$ її дотична утворює з віссю Ox кут $\pi/4$.

Розв'язання: Знайдемо похідну функції: $y'=2\cos 2x$. Так як кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до вісі Ox, тоді: $tg\,\pi/4=1\Rightarrow 2\cos 2x=1; \cos 2x=1/2; 2x=\pm\pi/3+2\pi n, n\in Z$; $x=\pm\pi/6+\pi n, n\in Z$ - шукані точки.

Пряма MQ (рис. 7), яка проходить через точку дотику M і перпендикулярна до дотичної MK, називається ***нормальною прямою (нормаллю)***. Її рівняння

$$y-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

ПРИКЛАД. Записати рівняння нормалі до кривої $y=3tg4x$ у точці з абсцисою $x_0=\pi/16$.

Розв'язання: Знайдемо похідну функції $y'=(3tg4x)'=12/cos^2 4x$. Знайдемо значення похідної у точці $x_0=\pi/16$: $y'(x_0)=y'(\pi/16)=12/cos^2(\pi/4)=$

$=12/(1/\sqrt{2})^2=24$. Знайдемо значення функції в точці $x_0=\pi/16$: $y_0=y(x_0)=y(\pi/16)=3tg(\pi/4)=3$. Підставимо знайдені значення в рівняння нормалі: $y-3=-1/24\cdot(x-\pi/16)$, $x/24+y-3-\pi/384=0$ - отримали шукане рівняння нормалі.

4.3 ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІНОЇ

Нехай матеріальна точка рухається під дією деяких сил. Візьмемо будь-який момент часу t_0 і розглянемо проміжок часу Δt від моменту t_0 до моменту $t=t_0+\Delta t$. За цей проміжок часу точка пройде певний шлях, який позначимо через $\Delta S(t_0)$. Цей шлях – функція Δt. За відомим з фізики означенням, відношення $\Delta S(t_0)/\Delta t$ є середня швидкість руху точки за час Δt. Розглядатимемо дедалі коротші проміжки Δt, що прямують до нуля. Границя

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta S(t_0)/\Delta t=S'(t_0)=v(t_0)$$

є миттєвою швидкістю точки у момент часу t_0.

Отже, миттєва швидкість v нерівномірного прямолінійного руху є похідна від функції, яка виражає залежність пройденого шляху S від часу t:

$$v=S'(t).$$

ПРИКЛАД 1. Закон руху матеріальної точки $S=5/2\,t^2-4t+6$. В який момент часу швидкість її буде дорівнювати 2 м/с?

Розв'язання: Застосовуючи фізичний зміст похідної, знайдемо швидкість руху матеріальної точки, як похідну від пройденого шляху:

$v(t) = S'(t) = (5/2\,t^2 - 4t + 6)' = 5t - 4$. Відомо, що швидкість в момент часу t_0 дорівнює 2 м/с, тоді: $v(t_0) = 2; 5t - 4 = 2; t = 6/5 = 1\frac{1}{5}$ (ч).

ПРИКЛАД 2. Дві матеріальні точки рухаються за законами: $x_1 = 5t^2 - t + 6$ і $x_2 = 4t^2 + 18$. В який момент часу їх швидкості будуть рівними?

Розв'язання: Застосовуючи фізичний зміст похідної, знайдемо швидкість руху матеріальних точок, як похідну від пройденого шляху:

$$v_1'(t) = x_1' = 10t - 1 \text{ і } v_2'(t) = x_2' = 8t.$$

За умовою задачі ці швидкості рівні, з цієї умови знайдемо шуканий момент часу:

$$10t - 1 = 8t; 2t = 1; t = 1/2.$$

4.4 ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Формула	Правило
$(C \cdot u)' = C \cdot u'$ (C - стала)	Сталий множник можна виносити за знак похідної.
ПРИКЛАД. $(9 \cdot x)' = 9 \cdot x' = 9$.	
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	*Похідна суми (різниці)* диференційованих функцій дорівнює сумі (різниці) їх похідних.
ПРИКЛАД. $(\sin x - 3)' = (\sin x)' - 3' = \cos x$.	
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	*Похідна добутку* дорівнює сумі добутку похідної першої функції на другу функцію та добутку

	похідної другої функції на першу функцію
ПРИКЛАД. $(x^2 \cdot \cos x)' = (x^2)' \cdot \cos x + x^2 \cdot (\cos x)' =$ $= 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x.$	
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$	*Похідна частки* дорівнює відношенню різниці між добутком похідної функції чисельника на функцію знаменника і добутком похідної функції знаменника на функцію чисельника до квадрата функції знаменника
ПРИКЛАД. $\left(\dfrac{e^x}{x}\right)' = \dfrac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot x'}{x^2} = \dfrac{e^x x - e^x}{x^2}$.	

4.5 ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

Елементарні функції	Складені функції (u - складена функція)
1. Похідна сталої величини	
$C' = 0$	**ПРИКЛАД.** $7' = 0$
2. Похідна аргументу	
$x' = 1$	
3. Похідна степеневої функції	
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, n - стала. **ПРИКЛАД.** $(x^{10})' = 10 \cdot x^9$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ **ПРИКЛАД.** $(\mathrm{tg}^2\, x)' = \begin{vmatrix} u = tgx \\ n = 2 \end{vmatrix} = 2tgx \cdot (tgx)' =$ $= 2tgx \cdot \left(1/\cos^2 x\right)$.

<table>
<tr><td colspan="2">Частинні випадки</td></tr>
<tr><td>3а. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$</td><td>$(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРИКЛАД.
$(\sqrt{3x-1})' = \left|u = 3x-1\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{3x-1}} \cdot (3x-1)' = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$.</td></tr>
<tr><td>3б. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$</td><td>$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРИКЛАД.
$\left(\dfrac{1}{ctgx}\right)' = \left|u = ctgx\right| = \dfrac{-1}{ctg^2 x} \cdot (ctgx)' = \dfrac{-1}{ctg^2 x} \cdot \dfrac{-1}{\sin^2 x} =$
$= \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Похідна показникової функції</td></tr>
<tr><td>$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$,
$a > 0,\ a \neq 1$,
a - стала</td><td>$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$</td></tr>
<tr><td>ПРИКЛАД.
$(7^x)' = 7^x \cdot \ln 7$.</td><td>ПРИКЛАД.
$\left((1/2)^{\sqrt{x+4}}\right)' = \left|u = \sqrt{x+4}\right| =$
$= (1/2)^{\sqrt{x+4}} \cdot \ln(1/2) \cdot (\sqrt{x+4})' =$
$= (1/2)^{\sqrt{x+4}} \cdot \ln(1/2) \cdot 1/(2\sqrt{x+4})$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Похідна експоненти</td></tr>
<tr><td>$(e^x)' = e^x$</td><td>$(e^u)' = e^u \cdot u'$</td></tr>
</table>

ПРИКЛАД.

$$\left(e^{\sqrt[3]{(1-x)^2}}\right)' = \left|u=\sqrt[3]{(1-x)^2}\right| = e^{\sqrt[3]{(1-x)^2}}\cdot\left(\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)' =$$

$$= e^{\sqrt[3]{(1-x)^2}}\cdot 2/3(1-x)^{-1/3}\cdot(1-x)' = (-2e^{\sqrt[3]{(1-x)^2}})\big/(3\sqrt[3]{1-x}).$$

6. Похідна логарифмічної функції

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\cdot\ln a}$, $a>0,\ a\neq 1, x>0.$	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$, $a>0,\ a\neq 1, u>0.$
ПРИКЛАД. $(\log_4 x)' = 1/(x\cdot\ln 4)$	**ПРИКЛАД.** $(\log_{1/5}(x^2+3x))' = \left|u=x^2+3x\right| =$ $=1\big/((x^2+3x)\cdot\ln(1/5))\cdot(x^2+3x)' =$ $=(2x+3)\big/((x^2+3x)\cdot\ln(1/5)).$

Частинний випадок ($a=e$)

6а. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ x>0.$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u}\cdot u',\ u>0.$

ПРИКЛАД.

$$(\ln(5+9x))' = \left|u=5+9x\right| = \frac{1}{5+9x}\cdot(5+9x)' = \frac{9}{5+9x}.$$

7. Похідні тригонометричних функцій

7а. $(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u\cdot u'$

ПРИКЛАД. $(\sin\sqrt{x})' = \left|u=\sqrt{x}\right| = \cos\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x})' = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$

7б. $(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$

ПРИКЛАД.

$$(\cos(\ln x))' = \left|u=\ln x\right| = -\sin(\ln x)\cdot(\ln x)' = \frac{-\sin(\ln x)}{x}.$$

7в. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$

ПРИКЛАД. $(tge^x)' = \left\| u = e^x \right\| = 1/(\cos^2 e^x)\cdot(e^x)' = e^x/\cos^2 e^x$.	
7г. $(\mathrm{ctg}\,x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{ctg}\,u)' = \dfrac{-1}{\sin^2 u}\cdot u'$
ПРИКЛАД. $(tge^x)' = \left\| u = e^x \right\| = 1/(\cos^2 e^x)\cdot(e^x)' = e^x/\cos^2 e^x$.	
8. Похідні обернених тригонометричних функцій	
8а. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
ПРИКЛАД. $(\arcsin(1/x))' = \left\| u = 1/x \right\| = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1/x)^2}}\cdot(1/x)' = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}}\times$ $\times(-1/x^2) = -1/(x\sqrt{x^2-1})$.	
8б. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
ПРИКЛАД. $(\arccos 5x)' = \left\| u = 5x \right\| = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\cdot(5x)' = \dfrac{-5}{\sqrt{1-25x^2}}$.	
8в. $(\mathrm{arctg}\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arctg}\,u)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
ПРИКЛАД. $(\mathrm{arctg}\,9^x)' = \left\| u = 9^x \right\| = \dfrac{1}{1+(9^x)^2}\cdot(9^x)' = \dfrac{9^x\cdot\ln x}{1+9^{2x}}$.	
8г. $(\mathrm{arcctg}\,x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}\,u)' = \dfrac{-1}{1+u^2}\cdot u'$
ПРИКЛАД. $(\mathrm{arcctg}\,x^{-4})' = \left\| u = x^{-4} \right\| = \dfrac{-1}{1+(x^{-4})^2}\cdot(x^{-4})' = \dfrac{4x^{-5}}{1+x^{-8}}$.	

4.6 ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ

Якщо $y = f(u)$ і $u = u(x)$, тобто $y = f(u(x))$, то $(f(u(x)))' = f'_u(u) \cdot u'_x(x)$	***Похідна складеної функції*** f дорівнює добутку похідної даної функції f за проміжною змінною u на похідну від проміжної змінної u за незалежною змінною x.
ПРИКЛАД. Знайти похідну функції $y = \arccos(\ln x)$. $$y' = (\arccos(\ln x))' = \left\| \begin{matrix} f(u) = \arccos(\ln x) \\ u(x) = \ln x \end{matrix} \right\| = \frac{-1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} \cdot (\ln x)' =$$ $$= \frac{-1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} \cdot \frac{1}{x}.$$	

4.7 ЛОГАРИФМІЧНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Логарифмічне диференціювання застосовують, якщо треба диференціювати добуток декількох функцій або дріб, чисельник і знаменник якого містить добутки; також цей метод застосо-	**ПРИКЛАД 1.** Знайти похідну функції $y = \left(\sqrt[3]{(x-5)^2} \cdot \sqrt{2x^3 - 7x + 8}\right) \Big/ \sqrt[7]{(1-x)^6}$. <u>*Розв'язання:*</u> Спочатку логарифмуємо обидві частини рівності за основою e: $$\ln y = \ln \frac{\sqrt[3]{(x-5)^2} \cdot \sqrt{2x^3 - 7x + 8}}{\sqrt[7]{(1-x)^6}}.$$ Застосуємо властивості логарифмів: $$\ln y = \frac{2}{5}\ln(x-5) + \frac{1}{2}\ln(2x^3 - 7x + 8) +$$

вують до функцій виду $y=\left[f(x)\right]^{g(x)}$, тобто коли основа степеня, і показник степеня є функції залежні від x.	$+(6/7)\ln(1-x)$. Тепер диференцюємо обидві частини рівності: $\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{2}{5(x-5)}+\frac{6x^2-7}{2(2x^3-7x+8)}+$ $-\frac{6}{7(1-x)}$. Помножимо обидві частини на y: $y'=\left(\frac{2}{5(x-5)}+\frac{6x^2-7}{2(2x^3-7x+8)}-\frac{6}{7(1-x)}\right)\cdot$ $\cdot\frac{\sqrt[3]{(x-5)^2}\cdot\sqrt{2x^3-7x+8}}{\sqrt[7]{(1-x)^6}}$.

ПРИКЛАД 2. Знайти похідну функції $y=(\sin(3x-9))^{arcctg\frac{x}{5}}$.

Розв'язання: Логарифмуємо обидві частини рівності за основою e: $\ln y=\ln(\sin(3x-9))^{arcctg\frac{x}{5}}$; застосуємо властивість логарифмів: $\ln y = arcctg\frac{x}{5}\cdot\ln(\sin(3x-9))$; диференціюємо обидві частини рівності:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\left(arcctg\,\frac{x}{5}\right)'\cdot\ln(\sin(3x-9))+arcctg\,\frac{x}{5}\cdot\left(\ln(\sin(3x-9))\right)';$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{-1}{1+\left(x/5\right)^2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\ln(\sin(3x-9))+arcctg\,\frac{x}{5}\cdot\frac{\cos(3x-9)}{\sin(3x-9)}\cdot 3;$$

Помножимо обидві частини на y і отримаємо похідні заданої функції:

$$y'=\left(\frac{-\ln(\sin(3x-9))}{5(1+x^2/25)}+3arcctg\,\frac{x}{5}ctg(3x-9)\right)(\sin(3x-9))^{arcctg\frac{x}{5}}.$$

.

4.8 ПОХІДНА НЕЯВНОЇ ФУНКЦІЇ

Якщо незалежна змінна x і функція y пов'язані рівнянням виду $F(x,y)=0$, яке не можна розв'язати відносно y, тоді y називають ***неявною функцією*** від x.
Щоб знайти похідну функції, яка задана неявно, треба обидві частини рівняння $F(x,y)=0$ диференціювати за змінною x з урахуванням , що y є функція від x, а потім з отриманого рівняння визначається y'.

ПРИКЛАД. Знайти похідну від неявної функції $4x^3-9y+11=0$.

<u>*Розв'язання:*</u> Диференціюємо по x обидві частини рівності з урахуванням того, що: 1) y є функцію від x і що 2) похідна правої частини дорівнює нулю, отримаємо:

$$12x^2-9y'=0;\ -9y'=-12x^2;\ y'=\frac{4x^2}{3}.$$

4.9 ПОХІДНА ПАРАМЕТРИЧНО ЗАДАНОЇ ФУНКЦІЇ

Похідну функції $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, заданої параметрично, обчислюють за формулою: $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

ПРИКЛАД. Знайти похідну функції $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$, заданої параметрично.

<u>*Розв'язання:*</u> Знаходимо x'_t і y'_t:

$x'_t = a(1-\cos t); y'_t = a\sin t$. Отримані значення підставляємо у формулу, для обчислення похідної параметрично заданої функції: $$y'_x = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = ctg\frac{t}{2}.$$

4.10 ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Означення	Приклади
Нехай $f'(x)$ є похідною від функції $y = f(x)$, тоді похідна від функції $f'(x)$ називається ***другою похідною*** від функції $f(x)$ і позначається $f''(x)$ (читається: еф два штриха від ікс), або y'' (читається: ігрек два штриха), $\frac{d^2y}{dx^2}$ (читається: де два ігрек по де ікс квадрат)	**ПРИКЛАД.** Знайти другу похідну функції $y = tg(\ln 7x)$. <u>*Розв'язання:*</u> $y' = \left(tg(\ln 7x)\right)' =$ $= \frac{7}{\cos^2(\ln 7x)\cdot 7x} = \frac{1}{x\cdot\cos^2(\ln 7x)}$; $y'' = \left(y'(x)\right)' =$ $= \left(\frac{1}{x\cdot\cos^2(\ln 7x)}\right)' = \left(\frac{\cos^{-2}\ln 7x}{x}\right)' =$ $= \frac{2\cos^{-3}\ln 7x\sin\ln 7x\frac{7x}{7x} - \cos^{-2}\ln 7x}{x^2} =$ $= \frac{\cos^{-3}\ln 7x\left(2\sin\ln 7x\frac{7x}{7x} - \cos\ln 7x\right)}{x^2} =$ $= \frac{2\sin\ln 7x\frac{7x}{7x} - \cos\ln 7x}{x^2\cos^3\ln 7x}$.
Третя похідна	**ПРИКЛАД.** Знайти третю похід-

функції $y = f(x)$ позначається одним із символів: y''' (читається: ігрек три штриха); $f'''(x)$ (читається: еф три штриха від ікс); $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ (читається: де три ікс по де ігрек куб); $y^{(3)}$ (ігрек третя похідна).	ну функції $y = \arcsin 3x$. *<u>Розв'язання:</u>* $y' = (\arcsin 3x)' = \dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$; $y'' = \left(\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\right)' = \dfrac{27x}{\sqrt{(1-9x^2)^3}}$; $y''' = \left(\dfrac{27x}{\sqrt{(1-9x^2)^3}}\right)' =$ $= \dfrac{27\sqrt{(1-9x^2)^3} + 27x\frac{3}{2}\sqrt{1-9x^2}\,18x}{(1-9x^2)^3} =$ $= \dfrac{27\sqrt{1-9x^2}\,(1-9x^2+729x^2)}{(1-9x^2)^3} =$ $= \dfrac{27(720x^2+1)}{\sqrt{(1-9x^2)^5}}$.
Похідна порядку n є похідна від похідної порядку $(n-1)$. Ця похідна позначається одним із символів: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$. Знайти похідну порядку n від заданої функції означає знайти форму-	*Знайдемо похідні порядку n деяких основних елементарних функцій.* 1) Знайдемо $y^{(n)}$ функції $y = x^m$: $y' = mx^{m-1}$; $y'' = m(m-1)x^{m-2}$; $y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$. Бачимо закономірність: число множників перед x дорівнює порядку похідної; перший множник дорівнює показнику степеня m, а кожний наступний – на одиницю менший; в останньому множнику

лу, за якою можна визначити похідну будь-якого порядку від цієї функції. Взагалі, для цього треба обчислити всі послідовні похідні до n-ї включно. Але цього можна уникнути, застосувавши метод математичної індукції. На практиці роблять наступне: знаходять декілька послідовних похідних і закономірність між ними, і, враховуючи, що ця закономірність виконується для похідної будь-якого порядку, складають вираз для похідної порядку n.	із m віднімається число, на одиницю менше від порядку похідної; показник степеня букви x дорівнює m мінус порядок похідної. Покладаючи, що для похідної порядку n ця закономірність зберігається, отримаємо $y^{(n)} = m(m-1)(m-2)...(m-n+1)x^{m-n}$. 2) Знайдемо $y^{(n)}$ функції $y = a^x$: $y' = a^x \ln a;\ y'' = a^x (\ln a)^2;$ $y''' = a^x (\ln a)^3;\ y^{(4)} = a^x (\ln a)^4.$ Тут не важко помітити , що кожна із знайдених похідних дорівнює добутку a^x на $\ln a$ у степені, який дорівнює порядку похідної. Покладаючи, що ця закономірність виконується для похідної будь-якого порядку, отримаємо $y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$. 3) Знайдемо $y^{(n)}$ функції $y = e^x$: $y' = e^x; y'' = e^x; y''' = e^x;...; y^{(n)} = e^x.$ 4) Знайдемо $y^{(n)}$ функції $y = \ln x$: $y' = \frac{1}{x} = (-1)^0 \frac{1}{x}; y'' = \frac{-1}{x^2} = (-1)^1 \frac{1}{x^2};$ $y''' = \frac{2}{x^3} = (-1)^2 \frac{1\cdot 2}{x^3}; y^{(4)} = \frac{-2\cdot 3x^2}{x^6} =$ $= (-1)^3 \frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}.$ Виконуючи індуктивний перехід, отримаємо

	$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot2\cdot3...(n-1)}{x^n}=$ $=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$
Друга похідна параметрично заданої функції: $y''_{xx}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$ або $y''_{xx}=\dfrac{y''_{tt}\cdot x'_t-x''_{tt}\cdot y'_t}{\left(x'_t\right)^3}$	**ПРИКЛАД.** Знайти другу похідну функції $\begin{cases} y=ctg\,8t \\ x=tg\,8t \end{cases}.$ <u>*Розв'язання:*</u> Знайдемо першу похідну функції, застосовуючи формулу $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$: $y'_x=\dfrac{-8/\sin^2 8t}{8/\cos^2 8t}=$ $=-ctg^2 8t$; $y''_{xx}=\dfrac{16ctg\,8t/\sin^2 8t}{8/\cos^2 8t}=$ $=2tg^3 8t$

Механічний зміст другої похідної. Якщо задано закон прямолінійного руху тіла $S=S(t)$, то $dS/dt=v(t)$ – швидкість, а

$d^2S/dt^2=dv/dt=a(t)$ – прискорення.

ПРИКЛАД. Тіло рухається по прямій за законом $S=\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{7}{2}t^2+10t-16$. Визначити прискорення руху тіла.

<u>*Розв'язання:*</u> За механічним змістом похідної, щоб визначити прискорення руху тіла, треба знайти другу похідну від шляху:

$$S'=v(t)=t^2-7t+10,$$
$$S''=a(t)=2t-7$$

- формула шуканого прискорення тіла.

4.11 ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, визначена на проміжку $(a;b)$ і неперервна у деякій фіксованій точці x цього проміжку, і нехай приросту аргументу Δx відповідає приріст функції $\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$, який є функцією аргументу Δx.

Якщо для приросту функції Δy існує таке число A, що приріст функції можна записати у вигляді $\Delta y = A \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$, де множник $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x)$ задовольняє рівності $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ ***диференційована у точці*** x. Головна частина $dy = A \cdot \Delta x$ приросту функції Δy , яка прямо пропорційна приросту аргументу Δx, називається ***диференціалом функції***.

Теорема 1 (зв'язок між похідною та диференціалом). Щоб функція $y = f(x)$ у точці x була диференційована, необхідно і достатньо, щоб вона мала у цій точці скінченну похідну $f'(x)$. Якщо виконується ця умова, то $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

Тут Δx не обов'язково нескінченно мала; але якщо Δx – нескінченно мала, то й dy – нескінченно мала. Саме у цих випадках dy (за умови, що $f'(x) \neq 0$) є головною частиною нескінченно малого приросту функції Δy.

Диференціалом незалежної змінної x називають її приріст Δx, тобто $dx = \Delta x$. З урахуванням цієї рівності, маємо $dy = f'(x) \cdot dx$. Тоді $f'(x) = dy/dx$.

Тобто, похідна дорівнює відношенню диференціалів функції та аргументу.

Правила обчислення диференціалів і диференціали основних елементарних функцій аналогічні відповідним формулам для похідних.

Правила обчислення диференціалів			
1	$d(u+v)=du+dv$	4	$d(uv)=vdu+udv$
2	$d(u-v)=du-dv$	5	$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$
3	$d(Cu)=Cdu$	6	$dy=y'_u du, \quad y=f(u(x))$
Основні диференціали			
1	$dC=0$	5	$d(\sin u)=\cos u\, du$
2	$d(u^\alpha)=\alpha u^{\alpha-1}du$	6	$d(\cos u)=-\sin u\, du$
2а	$d(au+b)=a\,du$	7	$d(tg\,u)=\frac{du}{\cos^2 u}$
2б	$d(au^2+bu+c)=$ $=(2au+b)\,du$	8	$d(ctg\,u)=-\frac{du}{\sin^2 u}$
2в	$d(\sqrt{u})=\frac{du}{2\sqrt{u}}$	9	$d(\arcsin u)=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
3	$d(\ln u)=\frac{du}{u}$	10	$d(\arccos u)=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
4	$d(a^u)=a^u\ln a\, du$	11	$d(arctg\,u)=\frac{du}{1+u^2}$
4а	$d(e^u)=e^u\,du$	12	$d(arcctg\,u)=-\frac{du}{1+u^2}$

ПРИКЛАД 1. Знайти диференціал функції: $y=e^{\sin x}\cdot\ln^2 x$.

Розв'язання:

$$dy=d\left(e^{\sin x}\cdot\ln^2 x\right)=\ln^2 x\cdot d\left(e^{\sin x}\right)+e^{\sin x}\cdot d\left(\ln^2 x\right)=$$

$$=\ln^2 x\cdot e^{\sin x}\cdot\cos x\cdot dx+e^{\sin x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx.$$

Геометрична інтерпретація диференціалу. Нехай $y = f(x)$ – деяка диференційована функція, $M(x_0; y_0)$ – точка, що належить графіку функції, $y_0 = f(x_0)$.

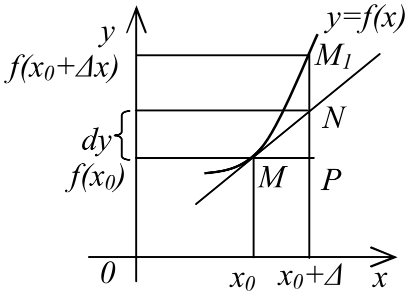


Рис. 8

Проведемо через точку M (рис. 8) дотичну до графіка функції. Кутовий коефіцієнт нахилу дотичної (тангенс кута нахилу α) дорівнює значенню похідної $f'(x_0)$. Якщо аргументу функції надати приріст Δx, то приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. На рис. 8 приріст функції Δy – довжина відрізка M_1P. При цьому приріст дотичної дорівнюватиме довжині відрізка NP. Обчисливши NP як катет прямокутного трикутника MNP, маємо $NP = MP \cdot tg\alpha = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

За означенням диференціала $f'(x_0) \cdot \Delta x = dy$. Таким чином, якщо $\Delta y = M_1P$ – приріст ординати графіка функції, то диференціал $dy = NP$ є приростом ординати дотичної.

Диференціал у наближених обчисленнях. При достатньо малому Δx можна замінити приріст функції її диференціалом, тобто $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$. Тоді наближене шукане значення функції можна знайти за формулою $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Зауваження. Нажаль, ця формула не дозволяє оцінити похибку отриманого наближення.

ПРИКЛАД 2. Обчислити наближено $\sin 31^0$.

<u>*Розв'язання:*</u> Покладемо $x_0 = \pi/6$, що відповідає 30^0; $\Delta x = \pi/180$, що відповідає 1^0; $x_0 + \Delta x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}$, що відповідає 31^0.

Тоді $\sin 31^0 = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{180}\right) \approx \sin\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{6} \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{1}{2} +$

$+\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\pi}{180} \approx 0,5 + 0,866 \cdot 0,0175 \approx 0,5152$.

Теорема 2 (інваріантність форми диференціала). Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – деякі диференційовані функції зазначених аргументів такі, що з них можна утворити складену функцію $y = f(\varphi(x))$. Диференціал складеної функції визначається рівністю $dy = y'_u \cdot du$. Тобто, форма диференціала функції не залежить від того, є аргумент незалежною змінною чи функцією іншого аргументу.

4.12 ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай маємо функцію $y = f(x)$, де x – незалежна змінна. Диференціал цієї функції $dy = f'(x) \cdot dx$ є деякою функцією x , але від x може залежати тільки перший множник $f'(x)$, другий множник dx є приростом незалежної змінної x і від значення цієї змінної не залежить. Оскільки dy є функція від x, то маємо право говорити про диференціал цієї функції.

Диференціал від диференціала функції називають ***другим диференціалом (диференціалом другого порядку)*** цієї функції і позначають через $d^2 y$:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x))'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Аналогічно визначаються диференціали третього і наступних порядків. ***Диференціалом*** n***-го порядку*** називається перший диференціал від диференціала

$(n-1)$-го порядку: $d^n y = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) =$

$$= (f^{(n-1)}(x)dx^{n-1})'dx = (f^{(n-1)}(x))'dx^{n-1}dx = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Зауваження. Диференціали другого і вищих порядків властивості інваріантності форми не мають. Користуючись поняттям диференціала, похідну другого і вищих порядків можна подати як відношення диференціалів відповідного порядку:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad , \; y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

при умові, що x – незалежна змінна.

ПРИКЛАД 1. Знайти диференціал другого порядку функції $y = 2^{\sqrt{x}} \cdot \cos 4x$.

Розв'язання:

$$dy = d\left(2^{\sqrt{x}} \cdot \cos 4x\right) = \cos 4x \cdot d\left(2^{\sqrt{x}}\right) + 2^{\sqrt{x}} \cdot d(\cos 4x) =$$
$$= \cos 4x \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot \ln 2 \cdot dx - 2^{\sqrt{x}} \cdot \sin 4x \cdot 4 \cdot dx;$$

$$d^2y = d\left(\cos 4x \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot \ln 2 \cdot dx - 2^{\sqrt{x}} \cdot \sin 4x \cdot 4 \cdot dx\right) =$$
$$= \left(-4\sin 4x \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot \ln 2 + \cos 4x \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot \ln^2 2\right)dx^2 -$$
$$- \left(2^{\sqrt{x}} \cdot \ln 2 \cdot \sin 4x \cdot 4 + 16\cos 4x \cdot 2^{\sqrt{x}}\right)dx^2.$$

5. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

5.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ

Теорема Ролля: Нехай функція $f(x)$ диференційована на замкнутому проміжку (a,b) і має на кінцях проміжку однакові значення $f(a)=f(b)$ (дивись рис. 9). Тоді похідна $f'(x)$ хоча б один раз обертається на нуль всередині проміжку.

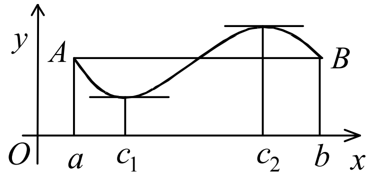


Рис. 9

На рис. 9 між точками $x=a$ і $x=b$, графік функції $f(x)$ має дві точки, де дотична паралельна вісі OX (тобто $f'(x)=0$).

Зауваження 1. Якщо диференційована функція $f(x)$ має при $x=a$ і $x=b$ однакові значення, хоч би й не рівні нулю, то похідна $f'(x)$ рівним чином обертається в нуль всередині проміжку (a,b).

Зауваження 2. Теорема Ролля залишається у силі і в тому випадку, коли $f(x)$ диференційована лише у внутрішніх точках проміжку (a,b), на кінцях же функція $f(x)$ може бути і не диференційована, а лише неперервна.

Теорема Лагранжа про середнє значення. Якщо функція $f(x)$ диференційована в замкнутому проміжку (a,b), то відношення $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ дорівнює значенню похідної $f'(x)$ у деякій точці $x = \xi$, яка лежить всередині проміжку (a,b): $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

Геометричний зміст теореми Лагранжа. Відношення $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{KB}{AK}$ (рис. 10) є кутовий коефіцієнт хорди AB, а $f'(\xi)$ - кутовий коефіцієнт дотичної NT. Теорема Лагранжа стверджує, що між A і B на дузі $\breve{AB}$ знайдеться щонайменше одна точка N, де дотична паралельна хорді AB за умови, що *в кожній точці* дуги $\breve{AB}$ існує дотична.

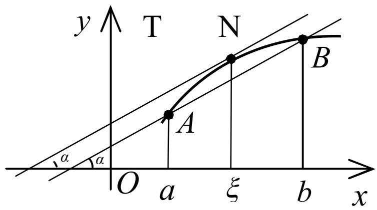


Рис. 10

Друге формулювання теореми Лагранжа. Рівняння $f'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (при виконанні умови теореми) має щонайменше один корінь $x = \xi$ всередині проміжку (a,b).

Зауваження 3. Положення цього кореня (або коренів) залежить від виду функції $f(x)$. Якщо вона – квадратична (графік парабола), отримаємо рівняння першого степеня; його корінь лежить точно всередині (a,b), тобто $\xi = (b+a)/2$.

Для інших функцій ця властивість виконується приблизно; а саме, якщо a має постійне значення, а b прямує до a, тоді один з коренів , як правило, прямує до середини відрізку (a,b), тобто $\lim\limits_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{1}{2}$.

Узагальнена теорема про середнє значення (Коші): Нехай похідні $f'(t)$ і $\varphi'(t)$ двох функцій $f(t)$ і $\varphi(t)$, диференційованих у замкнутому проміжку (a,b), не обертаються одночасно на нуль ніде в середині цього проміжку. Нехай при цьому одна з цих функцій $f(t)$, $\varphi(t)$ має нерівні значення на кінцях інтервалу (наприклад, $\varphi(a)\neq\varphi(b)$). Тоді прирости $f(b)-f(a)$ і $\varphi(b)-\varphi(a)$ даних функцій відносяться як їх похідні у деякій точці $t=\tau$, яка лежить всередині проміжку (a,b):

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\tau)}{\varphi'(\tau)}. \qquad (*)$$

Зауваження 4. Формула Лагранжа є частинним випадком формули Коші при $\varphi(t)=t$.

Геометрична інтерпретація теореми Коші. Відношення

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$$

є кутовий коефіцієнт хорди AB (рис. 4), а відношення

$$\frac{f'(\tau)}{\varphi'(\tau)}=\frac{dy}{dx}$$

- кутовий коефіцієнт дотичної NT.

Зауваження 5. Якщо, всупереч умови теореми, ми мали б $f(b)=f(a)$ і $\varphi(b)=\varphi(a)$, тоді б ліва частина рівності (*) була б невизначена.

Зауваження 6. Згідно умові теореми Коші треба, щоб $f'(t)$ і $\varphi'(t)$ не дорівнювали нулю одночасно всередині проміжку (a,b), але на одному з кінців (або на обох) вони можуть одночасно обертатись на нуль (і навіть не існувати – тільки б $f(t)$ і $\varphi(t)$ були неперервні на обох кінцях).

ПРИКЛАД. Розглянемо функції $f(t)=t^3$ і $\varphi(t)=t^2$ на проміжку $(0;2)$. На кінці $t=0$ похідні $f'(t)=3t^2$ і $\varphi'(t)=2t$ обертаються в нуль, але всередині проміжку обидві відмінні від нуля. Кожна з функцій $f(t),\varphi(t)$ мають нерівні значення на кінцях $t=0$ і $t=2$. Умови теореми Коші виконані. Значить, відношення $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f(2)-f(0)}{\varphi(2)-\varphi(0)}=\frac{2^3}{2^2}=2$ повинно дорівнювати відношенню $\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t$ у деякій точці $t=\xi$, яка лежить між $a=0$ і $b=2$. Дійсно, рівняння $\frac{3}{2}t=2$ має корінь $t=4/3$, який лежить всередині проміжку $(0;2)$.

5.2 ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ такі, що: 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$; або $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$; 2) вони мають перші похідні в околі точки $x=a$	***Правило Лопіталя*** полягає у тому, що у випадку «невизначеностей» типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ обчислення границі відношення функцій, якщо виконуються всі вимоги, замінюють обчисленням границі відношення їх похідних, яке у біль-

(виключенням може бути сама точка a); 3) існує $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, тоді існує також $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ і має місце така рівність $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$	шості випадків є більш простим. У випадку, коли і відношення похідних приводить до «невизначеності» $0/0$ або ∞/∞, можна знову застосувати правило Лопіталя, і так до тих пір, поки не позбудетесь «невизначеностей».

5.2.1 Границя відношення двох нескінченно малих величин («невизначеність» виду $0/0$)

ПРИКЛАД 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}$ за допомогою правила Лопіталя.

Розв'язання: Якщо у даний дріб підставити -1 замість x, то отримаємо «невизначеність» виду $0/0$. Застосовуючи правило Лопіталя, отримаємо:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^3-5x^2+2x+8)'}{(x^4-2x^3-16x^2+2x+15)'}=$$
$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-10x+2}{4x^3-6x^2-32x+2}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}.$$

ПРИКЛАД 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ за допомогою правила Лопіталя.

Розв'язання: Якщо у даний дріб підставити 0 замість x, то отримаємо «невизначеність» виду $0/0$. Застосуємо правило Лопіталя:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$ Знову «невизначеність» виду $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{1}{3}$ винесемо за знак границі і вдруге застосуємо правило Лопіталя: $\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$. Знову «невизначеність» виду $\dfrac{0}{0}$; втретє застосуємо правило Лопіталя: $\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=\dfrac{1}{6}\cdot 1=\dfrac{1}{6}$.

5.2.2 Границя відношення двох нескінченно великих величин («невизначеність» виду ∞/∞)

ПРИКЛАД 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{1/x}$ за допомогою правила Лопіталя.

Зауваження. В умові задачі $x\to +0$, ця умова є важливою, тому що при $x\to -0$ або при $x\to 0$, $\ln x$ не існує, так як від'ємні числа логарифмів не мають.

<u>*Розв'язання:*</u> Якщо у даний дріб підставити +0 замість x, то отримаємо «невизначеність» виду $\dfrac{\infty}{\infty}$. Застосовуючи правило Лопіталя, отримаємо:

$$\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{1/x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to +0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to +0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to +0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to +0}x=0.$$

ПРИКЛАД 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$ за допомогою правила Лопіталя.

<u>*Розв'язання:*</u> Якщо у даний дріб підставити $+\infty$ замість x, то отримаємо «невизначеність» виду $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Застосуємо правило Лопіталя два рази:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty\cdot$$

5.2.3 Границя різниці двох нескінченно великих величин («невизначеність» виду $\infty-\infty$)

Якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ і $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{g}(x)=+\infty$, то для знаходження границі $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ треба перетворити різницю $f(x)-g(x)$ до такого виду: $f(x)-g(x)=\left(\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}\right)\Big/\left(\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}\right)$; тоді границя $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}\right)\Big/\left(\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}\right)$ має «невизначеність» виду $\dfrac{0}{0}$, яку можна обчислити за допомогою правила Лопіталя.

ПРИКЛАД. Знайти границю $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$ за допомогою правила Лопіталя.

<u>*Розв'язання:*</u> Якщо у даний дріб підставити 0 замість x, то отримаємо «невизначеність» виду $\infty-\infty$. Перетворимо різницю у дріб і двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

5.2.4 Границя добутку нескінченно малої і нескінченно великої величин («невизначеність» виду $0\cdot\infty$)

Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{g}(x)=\infty$. Перетворимо добуток $f(x)\cdot \mathrm{g}(x)$ функцій у дріб:

$$f(x)\cdot \mathrm{g}(x)=f(x)/(1/g(x))$$

або

$$f(x)\cdot \mathrm{g}(x)=\mathrm{g}(x)/(1/f(x)),$$

тоді ми отримаємо наступні границі:

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot \mathrm{g}(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{g}(x)}{1/f(x)}.$$

ПРИКЛАД. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$ за допомогою правила Лопіталя.

<u>*Розв'язання:*</u> Якщо у даний дріб підставити 1 замість x, то отримаємо «невизначеність» виду $0\cdot\infty$. Перетворимо добуток у дріб і застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=0\cdot\infty=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1\Big/tg\dfrac{\pi x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)'}{\left(ctg\dfrac{\pi x}{2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\left(-1\Big/\sin^2\dfrac{\pi x}{2}\right)\cdot\dfrac{\pi}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{2\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

5.2.5 «Невизначеності» виду $1^\infty,\infty^0,0^0$

«Невизначеності» цих видів зводяться до «невизначеності» виду $0\cdot\infty$, за допомогою логарифмування:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)^{\mathrm{g}(x)}\right]=A;\ \ln\lim_{x\to a}\left[f(x)^{\mathrm{g}(x)}\right]=\lim_{x\to a}\ln\left[f(x)^{\mathrm{g}(x)}\right]=$$

$$\lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln\left[f(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{\ln\left[f(x)\right]}{1/\left(g(x)\right)}=\frac{0}{0}\ \textit{або}\ \frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\left(\ln\left[f(x)\right]\right)'}{\left(1/g(x)\right)'}=k;\ A=e^{k}\ \ (f(x)>0).$$

ПРИКЛАД 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+5x\right)^{1/x}$ за допомогою правила Лопіталя.

<u>*Розв'язання:*</u> Скористуємось логарифмуванням:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+5x\right)^{1/x}=1^{\infty}=A;\ln\lim_{x\to 0}\left(1+5x\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+5x\right)^{1/x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+5x\right)}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\left(1+5x\right))'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5/\left(1+5x\right)}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5}{1+5x}=\frac{5}{1}=5;A=e^{5}.$$

ПРИКЛАД 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(tgx\right)^{\sin 2x}$ за допомогою правила Лопіталя.

<u>*Розв'язання:*</u> Скористуємось логарифмуванням:

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(tgx\right)^{\sin 2x}=\infty^{0}=A;\ln\lim_{x\to\pi/2}\left(tgx\right)^{\sin 2x}=\lim_{x\to\pi/2}\ln\left(tgx\right)^{\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\left(\sin 2x\cdot\ln(tgx)\right)=0\cdot\infty=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\ln\left(tgx\right))'}{(1/\sin 2x)'}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1/\left(tgx\cdot\cos^{2}x\right)}{-2\cos 2x/\sin^{2}2x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin^{2}2x}{-2tgx\cos^{2}x\cos 2x}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\sin^{2}2x}{2\sin x\cos x\cos 2x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\sin^{2}2x}{\sin 2x\cos 2x}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\sin 2x}{\cos 2x}=0;\ e^{0}=1.$$

5.3 МОНОТОННІСТЬ І ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ

Функція $f(x)$ називається ***зростаючою*** на деякому інтервалі, якщо для будь яких чисел x_1 і x_2 з цього інтервалу з нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.
Функція $f(x)$ називається ***спадаючою*** на деякому інтервалі, якщо для будь яких чисел x_1 і x_2 з цього інтервалу з нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.
Умови зростання та спадання функції *(достатні умови монотонності та сталості).* Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $\left[a;b\right]$ і диференційована в усіх його внутрішніх точках. Якщо для всіх $x \in \left(a;b\right)$ похідна $f'(x)$: 1) додатна, то функція на цьому відрізку зростає; 2) від'ємна, то функція на цьому відрізку спадає; 3) дорівнює нулю, то функція на цьому відрізку – стала. *Зауваження 1.* Розглядаємо монотонність у строгому розумінні. *Зауваження 2.* При розв'язанні задач, в яких треба визначити інтервали зростання і спадання функції, потрібно визначити область існування цієї функції.
ПРИКЛАД 1. Визначити інтервали зростання і спадання функції $y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$. Розв'язання: Областю існування даної функції є вся вісь Ox, тобто функція існує при будь-якому x. Знайдемо похідну функції $y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$:

$y' = 12x^2 - 42x + 18$; знайдемо критичні точки функції (точки де $y' = 0$ і де y' не існує): $12x^2 - 42x + 18 = 0$; $x_1 = 1/2; x_2 = 3$. Отже, $y' > 0$, якщо $x > 3$ і $x < 1/2$, тобто функція зростає на проміжках $(-\infty; 1/2)$ і $(3; \infty)$; $y' < 0$, якщо $1/2 < x < 3$, тобто функція спадає на проміжку $(1/2; 3)$.

Максимум і мінімум функції.

Функція $f(x)$ має в точці $x = x_0$ ***максимум***, якщо значення функції в цій точці більше, ніж її значення в усіх точках, достатньо близьких до x_0. Тобто: функція $f(x)$ має максимум при $x = x_0$, якщо

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$$

для будь-яких Δx - як додатних, так і від'ємних, але достатньо малих за абсолютною величиною.

Функція $f(x)$ має в точці $x = x_0$ ***мінімум***, якщо значення функції в цій точці менше, ніж її значення в усіх точках, достатньо близьких до x_0.

Тобто: функція $f(x)$ має мінімум при $x = x_0$, якщо

$$f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$$

для будь-яких Δx - як додатних, так і від'ємних, але достатньо малих за абсолютною величиною.

Якщо у деякій точці функція має максимум або мінімум, то кажуть, що в цій точці має місце ***екстремум***, а значення функції в цій точці називається ***екстремальним.***

Зауваження 3. Треба пам'ятати:

1) максимум (мінімум) не є обов'язково найбільшим (найменшим) значенням, яке приймає

функція. За околом точки x_0 функція може приймати більші (менші) значення, ніж у цій точці.

2) функція може мати декілька максимумів і мінімумів.

3) функція, яка визначена на відрізку, може досягати екстремум тільки у внутрішніх точках цього відрізку.

Необхідна умова екстремуму. Якщо функція $f(x)$ має екстремум при $x = x_0$, тоді її похідна в цій точці дорівнює нулю, або ∞, або не існує.
З цього випливає, що точки екстремуму функції треба шукати тільки серед тих, в яких її перша похідна $f'(x) = 0,\ f'(x) = \infty$ або не існує. Дослідження інших точок не потрібно. Точки, в яких перша похідна функції дорівнює нулю, нескінченності, а також ті, в яких вона не існує, називаються ***критичними.***

Зауваження 4. Треба пам'ятати, що ця ознака екстремуму є тільки необхідною, але недостатньою: похідна функції може дорівнювати нулю, нескінченності або не існувати не тільки в тих точках, в яких функція досягає екстремуму. Тому, знайшовши критичні точки, в яких функція може досягти максимуму, треба кожну з них окремо дослідити за допомогою достатніх умов існування екстремуму.

Розглянемо їх.

Перша достатня умова існування екстремуму функції

Нехай точка $x = x_0$ є критичною точкою функції $f(x)$, а сама функція $f(x)$ неперервна і диференційована в усіх точках деякого інтервалу, якому вона належить (за виключенням самої точки). Тоді:

1) якщо при $x < x_0$ похідна функції $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, тоді в точці $x = x_0$ є максимум (тобто, якщо при переході зліва направо через критичну точку, перша похідна функції змінює знак з плюса на мінус, тоді в цій точці функція досягає максимуму);

2) якщо при $x < x_0$ похідна функції $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ - $f'(x) > 0$, тоді в точці $x = x_0$ є мінімум (тобто, якщо при переході зліва направо через критичну точку, перша похідна функції змінює знак з мінус на плюса, тоді в цій точці функція досягає мінімуму);

3) якщо при переході через критичну точку перша похідна функції не змінює знак, то екстремумів немає.

Правило для дослідження функції на екстремум за допомогою першої похідної

Для дослідження функції на екстремум за допомогою першої похідної треба:

1) Визначити область допустимих значень.
2) Знайти $f'(x)$ - першу похідну функції.
3) Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$, а також визначити ті значення x, при яких $f'(x) = \infty$ або не існує (тобто, знайти критичні точки функції $f(x)$). Нехай цими точками будуть точки з абсцисами $x_1, x_2, ..., x_n$, які знаходяться на проміжку $(a; b)$.

4) Усі критичні точки розташувати у порядку зростання їх абсцис на проміжку $(a;b)$, в якому функція має бути неперервною: $a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b$.
5) Всередині кожного з проміжків $(a;x_1)$, $(x_1;x_2)$, $(x_2;x_3)$,…, $(x_n;b)$ взяти будь-яку точку і визначити в цій точці знак першої похідної функції (неперервна похідна зберігає знак на кожному інтервалі між двома сусідніми критичними точками).
6) Виходячи зі знака похідної $f'(x)$, зробити висновок про поведінку функції на кожному інтервалі: якщо «+», то $f(x)$ зростає; якщо «-», то $f(x)$ спадає.
7) Проаналізувати зміну знака похідної $f'(x)$ при переході через кожну критичну точку і зробити висновок про наявність і характер екстремуму: якщо «+,-», то $f(x)$ має максимум; якщо «-,+», то $f(x)$ має мінімум; якщо «+,+» або «-,-», то екстремуму не має.
8) Обчислити екстремуми функції $f(x)$ у знайдених точках екстремуму, якщо такі існують: $y_{\min} = f(x_{\min})$; $y_{\max} = f(x_{\max})$.

ПРИКЛАД 2. Дослідити на монотонність і екстремум функцію $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$.

<u>*Розв'язання:*</u> 1) $D(x): x \in (-\infty, +\infty)$; $E(y): y \in (-\infty, +\infty)$.

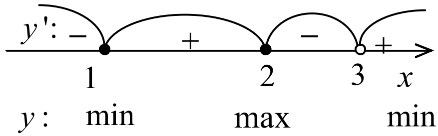
2) Знайдемо $y'(x)$ - першу похідну функції $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$: $y'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$, $y'(x) = 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$.

3) Знайдемо критичні точки функції:

$$4(x^3-6x^2+11x-6)=0\ ,x^3-x^2-5x^2+5x+6x-$$

$$-6=0,\ (x-1)(x-2)(x-3)=0,\ x_1=1, x_2=2, x_3=3.$$

4) Нанесемо критичні точки на пряму. Визначимо знак



похідної на кожному інтервалі, знайдемо екстремуми функції:

$x_{\min}=1\Rightarrow y_{\min}=y(1)=1-8+\ +22-24+12=3$,

$x_{\max}=2\Rightarrow y_{\max}=y(2)=2^4-8\cdot 2^3+22\cdot 2-$

$-24+12=4$, $x_{\min}=3\Rightarrow y_{\min}=y(3)=3^4-8\cdot 3^3+22\cdot 3^2-$

$-24\cdot 3\ +12=137$.

<u>*Відповідь.*</u> Точки мінімуму $(1;3)$ і $(3;137)$; точка максимуму $(2;4)$. Функція зростає при $x\in(1;2)$ і $x\in(3;+\infty)$; функція спадає при $x\in(-\infty;1)$ і $x\in(2;3)$.

Друга достатня умова існування екстремуму функції

Якщо в точці $x=x_0$ перша похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю ($f'(x_0)=0$), тоді при $x=x_0$ має місце максимум, якщо $f''(x)<0$ і мінімум, якщо $f''(x)>0$. Якщо ж $f''(x_0)=0$, тоді для висновку про екстремум в цій точці потрібно додаткове дослідження (передбачається, що функція $f(x)$ в околі точки $x=x_0$ має неперервну другу похідну).

Правило для дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної

Для дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної треба:

1) ОДЗ
2) Знайти $f'(x)$ - першу похідну функції.
3) Розв'язати рівняння $f'(x)=0$.
4) Дослідити знак $f''(x)$ - другої похідної функції – в кожній точці, яку знайшли в п. 3:
   якщо $f''(x)>0$, то у цій точці буде мінімум;
   якщо $f''(x)<0$, то у ній буде максимум;
   якщо $f''(x)$=0, то дослідження треба провести за допомогою першої похідної.

ПРИКЛАД 3. Дослідити функцію $f(x)=(x-1)^3(x+1)^2$ на екстремум.

Розв'язання: 1) $D(x): x\in(-\infty,+\infty)$; $E(y): y\in(-\infty,+\infty)$.
2) Знайдемо першу похідну функції:
$f'(x)=3(x-1)^2(x+1)^2+2(x-1)^3(x+1)=(x-1)^2(x+1)(5x+1)$
3) Розв'яжемо рівняння $f'(x)=0$: $x_1=1, x_2=-1, x_3=-1/5$ - критичні точки.
Дослідимо знак $f''(x)$ - другої похідної функції – у кожній точці, які знайшли в попередньому пункті:
$f''(x)=2(x-1)(x+1)(5x+1)+(x-1)^2(5x+1+5(x+1))=$
$=(x-1)(10x^2+12x+2+10x^2-4x-6)=(x-1)(20x^2+8x-4)$;
$f''(-1)=-16<0$ значить в цій точці буде максимум, $f''(-1/5)=114/25>0$, тобто в цій точці буде мінімум, $f''(1)=0$, тож цю точку треба дослідити за допомогою першої похідної. Візьмемо точку $x=0$, яка знахо-

диться ліворуч від $x=1$, і визначимо в ній знак першої похідної: $f'(0)=1>0$; потім візьмемо точку $x=2$, яка знаходиться праворуч від $x=1$, і визначимо в ній знак першої похідної: $f'(2)=33>0$. Оскільки перша похідна не змінює знак при переході через критичну точку $x=1$, то в цій точці немає екстремуму. Знайдемо екстремальні значення точок екстремуму:

$$x_{\min}=-1/5 \Rightarrow y_{\min}=y(-1/5)=-3456/3125,$$

$$x_{\max}=-1 \Rightarrow y_{\max}=y(-1)=0.$$

5.4 НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ВІДРІЗКУ

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді за відповідною властивістю на цьому відрізку вона досягає найбільшого і найменшого значень, які відповідно називають ***глобальним (абсолютним) максимумом і мінімумом*** даної функції $f(x)$ на вказаному відрізку $[a;b]$. Ці значення можуть досягатися на кінцях відрізка або у внутрішніх точках, що є точками екстремуму функції. Звідси випливає

Правило знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$:

1) знайти всі критичні точки першої похідної $f'(x)$, що лежать усередині відрізка $[a;b]$;

2) обчислити значення функції $f(x)$ в знайдених критичних точках і на кінцях відрізка;

3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше і найменше.

ПРИКЛАД. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^{1-\ln x}$ на відрізку $[1;e]$.

<u>*Розв'язання:*</u> Знайдемо похідну функції $y = x^{1-\ln x}$:

$$\ln y = \ln x^{1-\ln x}; \ln y = (1-\ln x)\ln x;\ \frac{1}{y}y' = \frac{-\ln x}{x} + \frac{1-\ln x}{x};$$

$$y' = \frac{1-2\ln x}{x}\cdot x^{1-\ln x}.$$

Знайдемо критичні точки: $y' = 0$,

$$\frac{1-2\ln x}{x}\cdot x^{1-\ln x} = 0;\ 1-2\ln x = 0\ (x \neq 0, x^{1-\ln x} \neq 0); \ln x = 1/2;$$

$x = e^{1/2}$; $x = \sqrt{e}$ критична точка, яка належить відрізку $[1;e]$. Знайдемо значення функції в цій точці:

$$y(\sqrt{e}) = \sqrt{e^{1-\ln\sqrt{e}}} = (e^{1-1/2})^{1/2} = e^{1/4} = \sqrt[4]{e}.$$

Знайдемо значення функції на кінцях відрізку:

$$y(\mathrm{e}) = e^{1-\ln e} = e^0 = 1,\ y(1) = 1^{1-\ln 1} = 1.$$

Отже: найбільше значення $\max\limits_{x\in[1;e]} y = y(\sqrt{e}) = \sqrt[4]{e}$, найменше значення $\min\limits_{x\in[1;e]} y = y(1) = y(e) = 1$.

5.5 ОПУКЛІСТЬ (УГНУТІСТЬ) І ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ ФУНКЦІЇ

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $(a;b)$ і в точці $x_0 \in (a;b)$ має скінченну похідну. Тоді до графіка даної функції у точці $M_0(x_0; f(x_0))$ можна провести дотичну.

Крива (графік функції) називається ***опуклою*** в точці x_0, якщо в деякому околі цієї точки вона розташована нижче дотичної, проведеної в точці x_0 (рис. 11). Якщо крива розташована вище дотичної, то вона називається ***угнутою*** (рис. 12).

Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ називається ***точкою перегину***, якщо у досить малому її околі точки кривої з абсцисами $x > x_0$ лежать з одного боку від дотичної, а точки з абсцисами $x < x_0$ – з іншого (рис. 13). Тобто, у точці M_0 крива переходить а одного боку дотичної до іншого.

Крива (графік функції) називається ***опуклою*** на інтервалі $(a;b)$, якщо вона опукла в кожній його точці. Тобто, на цьому інтервалі крива лежить нижче кожної своєї дотичної.

Аналогічно, крива (графік функції) називається ***угнутою*** на інтервалі $(a;b)$, якщо вона угнута в кожній його точці. Тобто, на цьому інтервалі крива лежить вище кожної своєї дотичної.
Точка перегину – це точка кривої, в якій сполучається ділянка опуклості з ділянкою вгнутості.

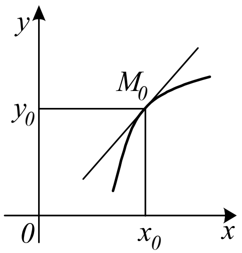


Рис. 11

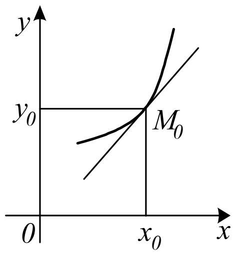


Рис. 12

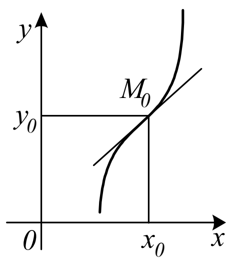


Рис. 13

Теорема 1 (достатні умови опуклості та угнутості). Нехай на інтервалі $(a;b)$ задана двічі диференційована функція $f(x)$. Якщо для всіх $x \in (a;b)$ друга похідна $f''(x)$: 1) від'ємна, то графік функції опуклий; 2) додатна, то графік функції вгнутий; 3) дорівнює нулю, то графік функції – пряма лінія.
Теорема 2 (необхідні умови точки перегину). Якщо $M_0(x_0;y_0)$ – точка перегину графіка функції $f(x)$, то друга похідна $f''(x)$ в точці x_0 або існує і дорівнює нулю $f''(x_0)=0$, або не існує. Якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці друга похідна $f''(x)$ або існує і дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається ***критичною точкою другої похідної.*** *Зауваження.* Критичні точки другої похідної – це точки, що «підозрілі» на перегин.
Теорема 3 (достатня умова точки перегину). Нехай x_0 – критична точка другої похідної функції $f(x)$, яка двічі диференційована в деякому околі цієї точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Якщо при переході через цю точку: 1) друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то при $x=x_0$ функція має перегин; 2) знак другої похідної $f''(x)$ не змінюється, то при

$x = x_0$ функція перегину не має.

Зауваження. Правило дослідження функції на опуклість, угнутість і перегин аналогічне правилу дослідження функції на монотонність і екстремум. Треба тільки замість знака першої похідної аналізувати знак другої похідної.

ПРИКЛАД. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину графіка функції $y = e^{-x^2}$ (крива Гауса, або крива ймовірностей).

<u>*Розв'язання:*</u> Область визначення функції: $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$. Знайдемо другу похідну:

$$y' = -2xe^{-x^2}\,;\; y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2).$$

Знайдемо критичні точки другого порядку:

$$e^{-x^2}(4x^2 - 2) = 0; 4x^2 = 2; x = \pm\sqrt{2}/2$$

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 14):

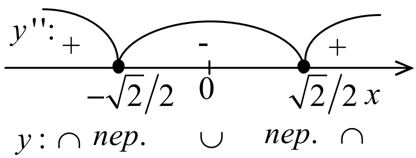


Рис. 14

На кожному з інтервалів обираємо по одному значенню аргументу $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, і визначаємо в них знак другої похідної:

$$y''(-2) = e^{-4}(64 - 2) = 62/e^4 > 0;\; y''(0) = e^0(-2) = -2 < 0;$$

$$y''(2) = e^4(64 - 2) = 62e^2 > 0.$$

Функція опукла при $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}/2\right) \cup \left(\sqrt{2}/2; +\infty\right)$; функція вгнута при $x \in \left(-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2\right)$. Перегин при $x_1 = -\sqrt{2}/2$ і $x_2 = \sqrt{2}/2$. Тоді

$$y_1 = y(-\sqrt{2}/2) = y_2 = y(\sqrt{2}/2) = 1/\sqrt{e}\ .$$

Отже, $M_1\left(-\sqrt{2}/2\,;1/\sqrt{e}\right)$ і $M_2\left(\sqrt{2}/2\,;1/\sqrt{e}\right)$ - точки перегину.

5.6 АСИМПТОТИ ФУНКЦІЇ

Нехай $y = f(x)$ – функція, графік якої має нескінченну гілку, тобто він має точки, що лежать як завгодно далеко від початку координат.

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма, до якої необмежено наближається гілка графіка, що йде в нескінченність. Тобто, відстань від змінної точки $M(x; f(x))$ до цієї прямої прямує до нуля, якщо вказана точка рухається вздовж вітки графіка до нескінченності.

Зауваження 1. Крива може перетинати свою асимптоту, причому неодноразово.

Асимптоти бувають двох видів: *вертикальні* й *похилі* (зокрема, *горизонтальні*) (рис. 15).

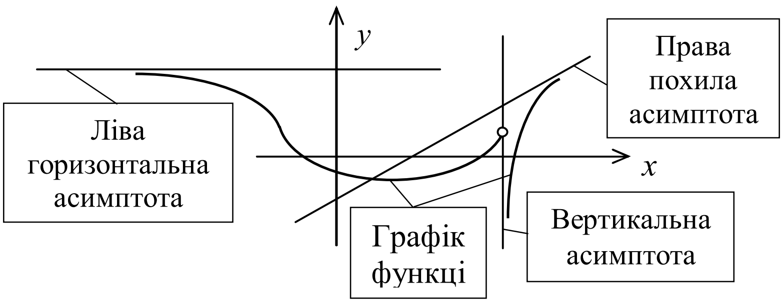


Рис. 15

Вертикальна асимптота має рівняння $x = a$, де a –

точка, в якій хоча б одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ нескінченна.

Зауваження 2. Точки, що «підозрілі» на вертикальні асимптоти, – це скінченні межові точки області визначення $D(f)$ та точки розриву функції $y=f(x)$.

Зауваження 3. Графік функції може мати довільну кількість вертикальних асимптот.

ПРИКЛАД 1. Знайти вертикальні асимптоти графіка функції $y=3/(x-2)$.

<u>*Розв'язання:*</u> Область визначення функції: $D(y): x\in(-\infty;2)\cup\left(2;+\infty\right)$. $x=2$ точка, що «підозріла» на вертикальні асимптоти. $\lim\limits_{x\to 2+0} 3/(x-2)=3/0=\infty \Rightarrow x=2$ вертикальна асимптота.

Похилі асимптоти. Нехай функція $y=f(x)$ має при $x\to+\infty$ праву похилу асимптоту (при $x\to-\infty$ ліву похилу асимптоти), тоді рівняння цих асимптот $y=kx+b$, де k і b знаходять за формулами:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx).$$

Зауваження 4. Якщо $k=0$, тоді похила асимптота є ***горизонтальною*** $y=b$, де b обчислюємо за формулою: $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Зауваження 5. Якщо хоча б одна з двох границь для $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ або $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$ не існує, то відповідної похилої асимптоти крива не має.

Зауваження 6. Графік функції $y=f(x)$ може мати не більше двох похилих (зокрема, горизонтальних) асимптот. При цьому крива повинна мати відповідну нескінченну гілку при $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$. Асимптоти можуть бути різними при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$.

ПРИКЛАД 2. Знайти похилі асимптоти графіка функції

$$y = \ln(e^{-2} + e^{3x}).$$

<u>Розв'язання:</u> Область визначення функції:

$$D(y): e^{-2} + e^{3x} > 0,\ x \in (-\infty; +\infty).$$

Оскільки крива має ліву при $x \to -\infty$ і праву при $x \to +\infty$ нескінченні гілки, то можуть існувати обидві – ліва і права – похилі асимптоти.

Шукаємо праву похилу асимптоту:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^{-2} + e^{3x})}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3e^{3x}}{e^{-2} + e^{3x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{9e^{3x}}{3e^{3x}} = 3;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (\ln(e^{-2} + e^{3x}) - 3x) = \infty - \infty = \lim_{x \to +\infty} (\ln(e^{-2} + e^{3x}) - \ln e^{3x}) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{e^{-2} + e^{3x}}{e^{3x}} = \frac{\infty}{\infty} = \ln \lim_{x \to +\infty} \frac{3e^{3x}}{3e^{3x}} = 0.$$ Отже, пряма

$y = 3x$ – права похила асимптота.

Шукаємо ліву похилу асимптоту

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(e^{-2} + e^{3x})}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(e^{-2} + 1)}{\infty} = 0,$$

$b = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(e^{-2} + e^{3x}) = \ln(e^{-2} + 1)$. Отже, пряма $y = \ln(e^{-2} + 1)$ - ліва горизонтальна асимптота.

5.7 ПОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

Нехай функція задана явно рівнянням $y = f(x)$. Повне дослідження цієї функції та побудову ескізу графіка можна здійснювати за наступною схемою.

Загальна схема дослідження функції та побудови графіка

1. Попереднє дослідження.

1.1. Знаходження області визначення $D(f)$ функції.

1.2. Знаходження точок перетину графіка з осями координат.

1.3. Знаходження інтервалів знакосталості, де функція зберігає знак (додатна чи від’ємна).

1.4. Дослідження функції на парність і непарність.

1.5. Дослідження функції на періодичність.

2. Дослідження точок розриву функції та її поведінки на кінцях інтервалів області визначення. Знаходження області значень $E(f)$ функції. Знаходження асимптот.

2.1. Знаходження односторонніх границь функції в точках розриву та на скінченних кінцях інтервалів області визначення. Класифікація точок розриву. Знаходження вертикальних асимптот.

2.2. Дослідження поведінки функції «на нескінченності» (при $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$). Знаходження області значень $E(f)$ функції. Знаходження похилих асимптот.

3. Дослідження функції за допомогою першої похідної.

3.1. Знаходження інтервалів зростання та спадання функції.

3.2. Знаходження точок екстремуму та відповідних екстремальних значень функції.

4. Дослідження функції за допомогою другої похідної.

4.1. Знаходження інтервалів опуклості та угнутості функції.

4.2. Знаходження точок перегину.

5. Побудова графіка.

5.1. Побудова асимптот.
5.2. Побудова характерних точок, знайдених на попередніх етапах.
5.3. Виділення штриховкою вертикальних смуг (вище чи нижче осі Ox відповідно до знака функції), де лежать частини графіка.
5.4. При необхідності проведення додаткових обчислень значень функції в пробних точках з тих інтервалів, де потрібно уточнити розміщення графіка.
5.5. Побудова ескіза графіка.

Зауваження. Під час дослідження конкретної функції не обов'язково строго додержуватися зазначеної вище схеми. Можна навіть не з'ясовувати тих чи інших властивостей, якщо вони досить очевидні. Так, на періодичність треба досліджувати тригонометричні функції, а раціональні функції – не треба, оскільки відомо, що вони неперіодичні.

ПРИКЛАД 1. Дослідити функцію $y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$ і побудувати ескіз її графіка.

<u>*Розв’язання:*</u> Знайдемо область визначення функції: $D(y): x+1\neq 0; x\neq -1; x\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. Точки перетину графіка функції: з віссю Ox $(y=0): \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3=0; x=1$, з віссю Oy $(x=0): y=-1$.
Маємо дві точки: $(1;0),(0;-1)$.

Інтервали знакосталості, де функція додатна чи

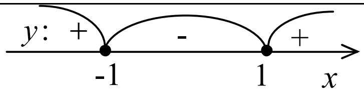


Рис. 16

від'ємна (рис. 16): функція від'ємна при $x \in (-1;1)$; функція додатна при $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

Перевіримо функцію на парність та непарність: $y(-x) = \left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)^3 = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \neq y(x) \neq -y(x)$ – функція не є парною і не є непарною.

Функція неперіодична.

Так як функція має точку розриву $x=-1$, тоді в цій точці має бути вертикальна асимптота. Покажемо це:

$$\lim_{x\to -1-0}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 = \frac{-8}{-0} = \infty\,,\ \lim_{x\to -1+0}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 = \frac{-8}{0} = -\infty$$

тобто $x=-1$ вертикальна асимптота.

Досліджуємо поведінку функції при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3(x-1)^2}{3(x+1)^2} = \frac{\infty}{\infty} =$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2(x-1)}{2(x+1)} = \frac{\infty}{\infty} = 1\,,\ \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3(x-1)^2}{3(x+1)^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2(x-1)}{2(x+1)} = \frac{\infty}{\infty} = 1\,.$$

Область значень функції $E(f): y \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

Похилі асимптоти: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^3} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3(1-1/x^3)^3}{x^4(1+1/x^3)^3} = \frac{1}{\infty} = 0\,,\ b = \lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^3} =$$

$= \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3(1-1/x^3)^3}{x^3(1+1/x^3)^3} = 1 \Rightarrow y=1$ - горизонтальна (ліва і права) асимптоти.

Обчислимо похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y' = \left(\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3\right)' = \frac{3(x-1)^2(x+1)^3 - 3(x-1)^3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{6(x-1)^2}{(x+1)^4}$$

$\frac{6(x-1)^2}{(x+1)^4} = 0$; $y' = 0$ в точці $x = 1$; y' не існує в точці $x = -1$.

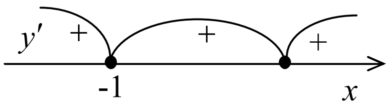


Рис. 17

Інтервали монотонності та екстремуми (рис. 17): функція зростає при $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

Так як $y' > 0$ на всій області визначення, то точок екстремуму функція не має.

Обчислимо другу похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y'' = \left(\frac{6(x-1)^2}{(x+1)^4}\right)' = \frac{6(2(x-1)(x+1)^4 - 4(x-1)^2(x+1)^3)}{(x+1)^8} =$$

$$= \frac{12(x-1)(x+1)^3(x+1-2x+2)}{(x+1)^8} = \frac{12(x-1)(3-x)}{(x+1)^5};$$

$y'' = 0$ в точках $x = 1$ і $x = 3$, y'' не існує в точці $x = -1$.

Інтервали опуклості й угнутості та точки перегину (рис. 18): функція опукла при $x \in (-1; 1) \cup (3; +\infty)$; функція угнута при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 3)$, $x_{пер} = 1, y_{пер} = 0$, $x_{пер} = 3, y_{пер} = 1/8$.

Отже, $(1; 0)$ і $(3; 1/8)$ – точка перегину.

Ескіз графіка дослідженої функції побудовано на рис. 19

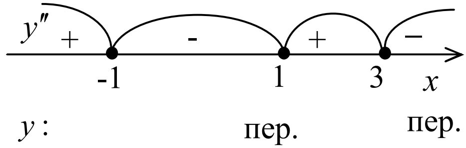


Рис. 18

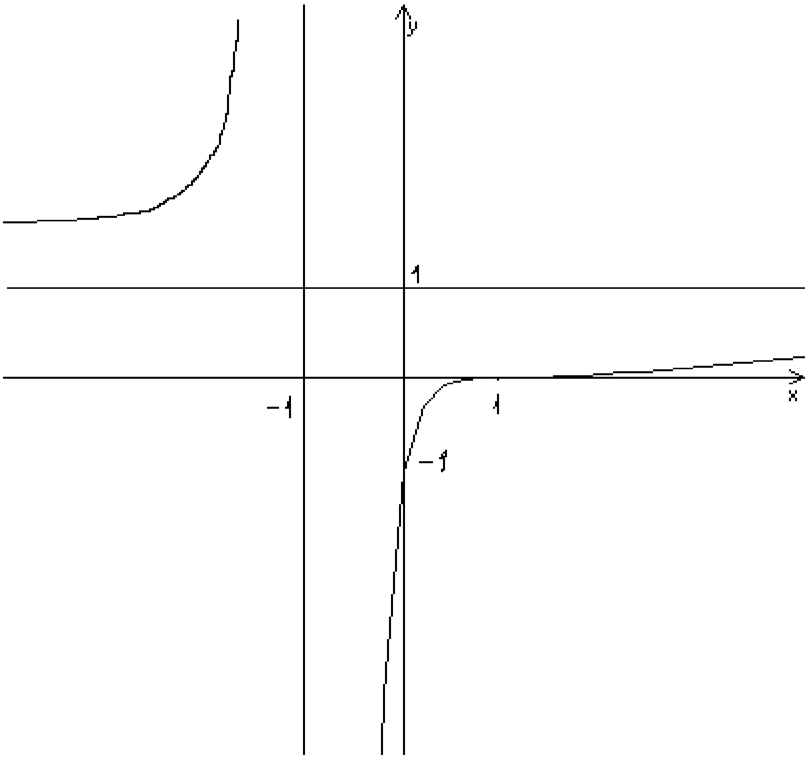


рис. 19

ПРИКЛАД 2. Дослідити функцію $y = \dfrac{2x+5}{e^{2(x+2)}}$ і побудувати ескіз її графіка.

<u>*Розв'язання:*</u> Знайдемо область визначення функції:

$D(y): x \in R$. Область значень функції $E(f): y \in (-\infty; 1)$.
Точки перетину графіка функції: з віссю $Ox\ (y=0): \dfrac{2x+5}{e^{2(x+2)}} = 0; x = -\dfrac{5}{2}$, з віссю $Oy\ (x=0): y = \dfrac{5}{e^4}$.
Маємо дві точки: $(-5/2; 0), (0; 5/e^4)$.

Інтервали знакосталості, де функція додатна чи від'ємна: функція від'ємна при $x \in (-\infty; -5/2)$; функція додатна при $x \in (-5/2; +\infty)$.
Перевіримо функцію на парність та непарність:
$y(-x) = \dfrac{-2x+5}{e^{2(-x+2)}} \neq y(x) \neq -y(x)$ – функція не є парною і не є непарною.
Функція неперіодична.
Так як функція існує на всій множині дійсних чисел, то точок розриву вона не має, значить і вертикальних асимптот не має.
Досліджуємо поведінку функції при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x+5}{e^{2(x+2)}} = \frac{-\infty}{0} = -\infty \text{ ,.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+5}{e^{2(x+2)}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2e^{2(x+2)}} = \frac{1}{\infty} = 0 .$$

Похилі асимптоти: при

$$x \to +\infty : k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+5}{xe^{2(x+2)}} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^{2(x+2)} + 2xe^{2(x+2)}} = \frac{2}{\infty} = 0 ,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+5}{e^{2(x+2)}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2e^{2(x+2)}} = \frac{1}{\infty} = 0 .$$

$y = 0$ - горизонтальна (права) асимптота.

при $x \to -\infty : k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(2x+5)e^{-2(x+2)}}{x} = \dfrac{\infty}{\infty} =$,

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2e^{-2(x+2)} - 2(2x+5)e^{-2(x+2)}}{1} = \infty,$$

значить при $x \to -\infty$ похилих асимптот не має.

Обчислимо похідну та знайдемо її критичні точки:

$$y' = \left(\frac{2x+5}{e^{2(x+2)}}\right)' = \frac{2e^{2(x+2)} - (4x+10)e^{2(x+2)}}{e^{4(x+2)}} = \frac{2e^{2(x+2)}(1-2x-5)}{e^{4(x+2)}} = \frac{-4(x+2)}{e^{2(x+2)}}$$

$$= \frac{-4(x+2)}{e^{2(x+2)}},$$

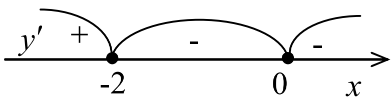


Рис. 20

$y' = 0 \; : \; \dfrac{-4(x+2)}{e^{2(x+2)}} = 0$

у точці $x = -2$.

Інтервали монотонності та екстремуми (рис. 20): функція зростає при $x \in (-\infty; -2)$, функція спадає при $x \in (-2; +\infty)$. Отже, точка $x = -2$ точка максимуму, $y_{\max} = 1$.

Обчислимо другу похідну та знайдемо її критичні точки:

$$y'' = \left(\frac{-4(x+2)}{e^{2(x+2)}}\right)' = -4\frac{e^{2(x+2)} - 2(x+2)e^{2(x+2)}}{e^{4(x+2)}} =$$

$$= -4\frac{e^{2(x+2)}(1-2x-4)}{e^{4(x+2)}} = \frac{4(3+2x)}{e^{2(x+2)}} \;;$$

$y'' = 0$ в точці $x = -3/2$.

Інтервали опуклості й угнутості та точки перегину: функція опукла при $x \in (-\infty; -3/2)$; функція вгнута при $x \in (-3/2; +\infty)$, $x_{пер} = -3/2, y_{пер} = 2/e$.

Отже, $(-3/2; 2/e)$ – точка перегину.

Ескіз графіка дослідженої функції побудовано на рис. 21:

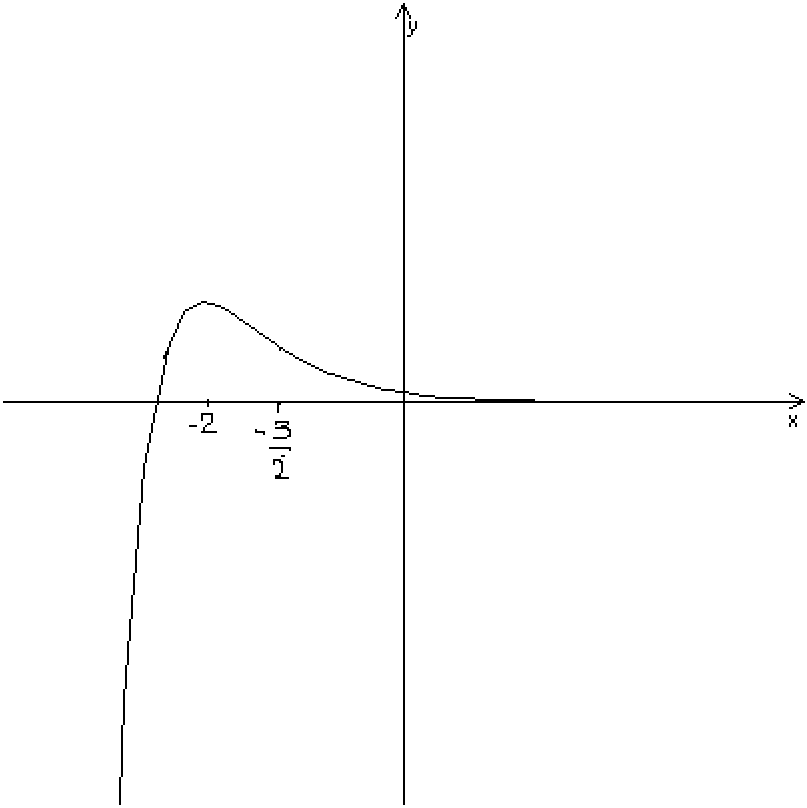


Рис. 21

ДОДАТКИ

Додаток 1.

Зауваження. Властивість 3 не розглядає границю відношення двох нескінченно малих $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ через наявність невизначеності. Ця границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ може дорівнювати: нулю, числу або нескінченості. У цьому випадку нескінчену малу $\alpha(x)$ називають відповідно: нескінченно малою більш високого порядку малості ніж $\beta(x)$; одного порядку малості; більш низького порядку малості.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *еквівалентними*, та записують $\alpha(x)\approx\beta(x)$. Якщо $\alpha(x)$ є нескінченно малою більш високого порядку малості, то записують $\alpha(x)=0\beta(x)$.

Додаток 2.

Зауваження 1. Різниця двох нескінченно великих величин може бути будь-якою величиною і називається *невизначеністю виду* $\infty-\infty$. Символічний запис $\infty-\infty=?$ Аналогічне твердження справедливе для алгебраїчної суми будь-якого скінченного числа нескінченно великих величин.

Зауваження 2. Відношення двох нескінченно великих величин може бути будь-якою величиною і називається *невизначеністю виду* ∞/∞. Символічний запис $\infty/\infty=?$

Додаток 3.

Примітка. Границя раціонального дробу

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{якщо} \quad m=n\\ 0, & \text{якщо} \quad m>n\\ \infty, & \text{якщо} \quad m<n\end{cases}$$

Додаток 4.

Означення. Величина називається обмеженою якщо абсолютне її значення не перевищує деякого (сталого) додатного числа М.

Наприклад, функція $y=\sin x$ є обмеженою на всій числовій осі, оскільки $|\sin x|\le 1$; функція $y=2^x$ обмежена знизу числом 0, а зверху необмежена.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа : для втузов. – 7-е изд., стереотипное. – М. : Наука, 1971. – 735 с.
2. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М. : Наука, 1973. – 872 с.
3. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 2001. – 471 с.
4. Гусак А. А. Справочное пособие по решению задач: математичний аналіз. – Мн.: ТетраСистемс, 1998. – 228 с.
5. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2. – М. : Наука, 1986. – Ч. 1. – 303 с., Ч. 2 – 415 с.
6. Колосов А. І., Якунін А. В., Ситникова Ю.В. Вища математика для економістів: у 2-х модулях. Модуль 1: конспект лекцій (для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 «Економіка підприємства» і 6.030509 «Облік і аудит»). – Харків: ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2014. – 237 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/35973/
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : для втузов. – Том 1. – 8-е изд., стереотипное. – М. : Наука, 1968. – 552 с.

Навчальне видання

КУЗНЕЦОВА Ганна Анатоліївна,
ЛАМТЮГОВА Світлана Миколаївна,
СИТНИКОВА Юлія Валеріївна

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В СХЕМАХ І ТАБЛИЦЯХ
Частина 1

Навчальний довідник
для самостійного вивчення курсу вищої математики
(для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання
за напрямами підготовки 6.060101 «Будівництво»,
6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка
та електротехнології»)

Відповідальний за випуск *С. О. Станішевський*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Ю. В. Ситникова*

План 2014 р., поз. 99М

Підп. до друку 21.01.2015 р. Формат 60*84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 4
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет міського господарства
імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.